Διαφορικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Πρόχειρες σημειώσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Όρια και συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

1.1 Πραγματικές και διανυσματικές συναρτήσεις.

Τα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ είναι όλες οι n-άδες πραγματικών αριθμών:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Οι αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ είναι οι *συντεταγμένες* της n-άδας $\mathbf{x}$.

Για τα στοιχεία του $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε το σύμβολο x χωρίς την παρένθεση, δηλαδή γράφουμε x αντί (x), και δεν χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbf{x}$.

Για τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε συνήθως δύο σύμβολα:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{u} = (x, y).$$

Ομοίως, για τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ έχουμε τα σύμβολα:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{u} = (x, y, z).$$

Το *άθροισμα* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ δύο στοιχείων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι το:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Το *γινόμενο* $\lambda\mathbf{x}$ ενός αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ και ενός στοιχείου $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι το:

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Το *μηδενικό στοιχείο* $\mathbf{0}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι το:

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0).$$

Όλα αυτά είναι γνωστά από στοιχειώδη μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Ας θυμηθούμε λίγα πράγματα για το γεωμετρικό περιεχόμενο των χώρων $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, και των στοιχείων τους.

Αν σε μία ευθεία καθορίσουμε ένα σημείο O, το οποίο θα λέμε ότι αντιστοιχεί στον αριθμό 0, και ένα άλλο σημείο E, το οποίο θα λέμε ότι αντιστοιχεί στον αριθμό 1, τότε είναι γνωστό ότι δημιουργείται μία ένα-προς-ένα αντιστοίχιση όλων των σημείων της ευθείας με όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}$. Η αντιστοίχιση αυτή υπακούει σε δύο κανόνες: (i) τα σημεία τα οποία βρίσκονται στην μεριά του O στην οποία βρίσκεται το E αντιστοιχούν στους θετικούς αριθμούς, και τα σημεία τα οποία βρίσκονται στην αντίθετη μεριά του O αντιστοιχούν στους αρνητικούς αριθμούς, και (ii) η απόσταση ενός σημείου από το Ο ισούται με την απόλυτη τιμή του αντίστοιχου αριθμού. Αν Μ είναι το σημείο το οποίο αντιστοιχεί στον αριθμό x, τότε "ταυτίζουμε" τον αριθμό x με δύο γεωμετρικά αντικείμενα: με το σημείο Μ και με το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Έτσι, λέμε χωρίς διάκριση: ο *αριθμός* x, το *σημείο* x, το *διάνυσμα* x.

Αν σε ένα επίπεδο θεωρήσουμε δύο ευθείες, τον x-άξονα και τον y-άξονα, κάθετες μεταξύ τους και τεμνόμενες στο σημείο Ο, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις δύο ευθείες ως δύο "αντίγραφα" του $\mathbb{R}$, σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Τότε είναι γνωστό ότι δημιουργείται μία ένα-προς-ένα αντιστοίχιση όλων των σημείων του επιπέδου με όλα τα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με τον εξής τρόπο: αν x είναι ο αριθμός στον x-άξονα ο οποίος αντιστοιχεί στην κάθετη προβολή του σημείου Μ του επιπέδου στον x-άξονα, και αν y είναι ο αριθμός στον y-άξονα ο οποίος αντιστοιχεί στην κάθετη προβολή του σημείου Μ στον y-άξονα, τότε λέμε ότι το ζεύγος $\mathbf{u} = (x, y)$ αντιστοιχεί στο σημείο Μ. Ένα επίπεδο με έναν x-άξονα και έναν y-άξονα λέμε ότι είναι ένα xy-επίπεδο. Αν Μ είναι το σημείο του xy-επιπέδου το οποίο αντιστοιχεί στο στοιχείο $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^2$, τότε συνηθίζουμε να "ταυτίζουμε" το $\mathbf{u}$ με δύο γεωμετρικά αντικείμενα: με το σημείο Μ και με το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Έτσι, λέμε: το *ζεύγος* $\mathbf{u}$, το *σημείο* $\mathbf{u}$, το *διάνυσμα* $\mathbf{u}$.

Αν στον χώρο θεωρήσουμε τρεις ευθείες, τον x-άξονα, τον y-άξονα και τον z-άξονα, κάθετες μεταξύ τους ανά δύο και τεμνόμενες στο σημείο Ο, τότε χρησιμοποιούμε αυτές τις τρεις ευθείες ως τρία "αντίγραφα" του $\mathbb{R}$. Τότε δημιουργείται μία ένα-προς-ένα αντιστοίχιση όλων των σημείων του χώρου με όλα τα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ως εξής: αν x είναι ο αριθμός στον x-άξονα ο οποίος αντιστοιχεί στην κάθετη προβολή του σημείου Μ του χώρου στον x-άξονα, αν y είναι ο αριθμός στον y-άξονα ο οποίος αντιστοιχεί στην κάθετη προβολή του σημείου Μ στον y-άξονα, και αν z είναι ο αριθμός στον z-άξονα ο οποίος αντιστοιχεί στην κάθετη προβολή του σημείου Μ στον z-άξονα, τότε λέμε ότι η τριάδα $\mathbf{u} = (x, y, z)$ αντιστοιχεί στο σημείο Μ. Ο χώρος με έναν x-άξονα, έναν y-άξονα και έναν z-άξονα λέμε ότι είναι ο xyz-χώρος. Αν Μ είναι το σημείο του xyz-χώρου το οποίο αντιστοιχεί στο στοιχείο $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^3$, τότε συνηθίζουμε να "ταυτίζουμε" το $\mathbf{u}$ με δύο γεωμετρικά αντικείμενα: με το σημείο Μ και με το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Έτσι, λέμε: η *τριάδα* $\mathbf{u}$, το *σημείο* $\mathbf{u}$, το *διάνυσμα* $\mathbf{u}$.

Σ' αυτές τις σημειώσεις θα χρησιμοποιούμε, όπως ήδη κάναμε, "παχιά" γραμματοσειρά για το σύμβολο του διανύσματος: $\mathbf{x}$. Το σύμβολο $\overrightarrow{\mathrm{x}}$ χρησιμοποιείται κι αυτό σε διάφορα βιβλία αλλά και στις διαλέξεις στον πίνακα.

Ο γεωμετρικός τρόπος πρόσθεσης δύο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$ είναι ο εξής: το $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου το οποίο σχηματίζεται από τα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (και τα τρία διανύσματα έχουν αρχή το σημείο $\mathbf{0}$). Οι κορυφές του παραλληλογράμμου είναι, με κυκλική διάταξη, τα σημεία: $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$. Ο γεωμετρικός τρόπος πολλαπλασιασμού αριθμού και διανύσματος στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$ είναι ο εξής: το $\lambda\mathbf{u}$ είναι το διάνυσμα στην ίδια κατεύθυνση, αν $\lambda > 0$, με το $\mathbf{u}$, και στην αντίθετη κατεύθυνση, αν $\lambda < 0$, με το $\mathbf{u}$, και με μήκος ίσο με $|\lambda|$ φορές το μήκος του $\mathbf{u}$. Επομένως, αν το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τότε το σημείο $\lambda\mathbf{u}$ διατρέχει την ευθεία του διανύσματος $\mathbf{u}$, δηλαδή την ευθεία η οποία περιέχει τα σημεία $\mathbf{0}$ και $\mathbf{u}$.

Είναι σαφές ότι δεν μπορούμε να έχουμε ανάλογη άμεση γεωμετρική εποπτεία των χώρων $\mathbb{R}^n$ όταν $n \geq 4$. Μπορούμε, όμως, να φανταζόμαστε τα στοιχεία και αυτών των χώρων ως *σημεία* και ως *διανύσματα* και να χρησιμοποιούμε ανάλογη γεωμετρική γλώσσα.

Στο xy-επίπεδο $\mathbb{R}^2$ το μήκος του διανύσματος $\mathbf{u} = (x, y)$ ή, ισοδύναμα, η απόσταση του σημείου $\mathbf{u} = (x, y)$ από το σημείο $\mathbf{0} = (0, 0)$ είναι ίση με $\sqrt{x^2 + y^2}$. Αυτό προκύπτει από το γνωστό Πυθαγόρειο θεώρημα. Ομοίως, στον xyz-χώρο $\mathbb{R}^3$ το μήκος του διανύσματος $\mathbf{u} = (x, y, z)$ ή, ισοδύναμα, η απόσταση του σημείου $\mathbf{u} = (x, y, z)$ από το σημείο $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ είναι ίση με $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Επομένως, έχουμε την εξής φυσιολογική γενίκευση της έννοιας του μήκους στον γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^n$. Το *μήκος* $\|\mathbf{x}\|$ του διανύσματος $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ ή, ισοδύναμα, η *απόσταση* του σημείου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ από το σημείο $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ είναι το:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Στο xy-επίπεδο $\mathbb{R}^2$ το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)$ είναι ίσο με $x_1x_2 + y_1y_2$. Ομοίως, στον xyz-χώρο $\mathbb{R}^3$ το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ είναι ίσο με $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Η γενίκευση της έννοιας του εσωτερικού γινομένου στον γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^n$ έχει ως εξής. Το *εσωτερικό γινόμενο* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ των διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι το:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Θεωρούμε συναρτήσεις

$$\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ παίρνει τιμές από το πεδίο ορισμού U, το οποίο είναι κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και η εξαρτημένη μεταβλητή $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^m$. Η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή συνδέονται με την σχέση

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

ή, ισοδύναμα,

$$(y_1, \dots, y_m) = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n).$$

Καθεμία από τις συντεταγμένες $y_1, \dots, y_m$ της εξαρτημένης μεταβλητής $\mathbf{y}$ είναι συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής $\mathbf{x}$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(\mathbf{x}) = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

όπου οι $f_1, \dots, f_m$ είναι συναρτήσεις ορισμένες στο U και με τιμές στο $\mathbb{R}$:

$$f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{R}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Οι συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m$ ονομάζονται **συντεταγμένες συναρτήσεις** της $\mathbf{f}$. Προφανώς, ισχύει

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_m) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad \text{για } \mathbf{x} \in U,$$

οπότε είναι εύκολο να διακρίνουμε τους τύπους $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ των συντεταγμένων συναρτήσεων της $\mathbf{f}$ όταν γνωρίζουμε τον τύπο $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ της $\mathbf{f}$.

Παράδειγμα 1.1. Η συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\mathbf{f}(x) = (2x, x^2 + \sin x, e^{3x})$$

έχει τρεις συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f_1(x) = 2x, \quad f_2(x) = x^2 + \sin x, \quad f_3(x) = e^{3x}.$$

Παράδειγμα 1.2. Η συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2y + ye^z, x + y\sin z)$$

έχει δύο συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f_1(x, y, z) = x^2y + ye^z, \quad f_2(x, y, z) = x + y\sin z.$$

Παράδειγμα 1.3. Η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \tfrac{1}{xy}$$

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$U = \{(x,y) \,|\, xy \neq 0\} = \{(x,y) \,|\, x \neq 0, y \neq 0\},$$

δηλαδή το $\mathbb{R}^2$ εκτός από την ένωση του x-άξονα και του y-άξονα. Η συνάρτηση f έχει μόνο μία συντεταγμένη συνάρτηση, τον εαυτό της.

Αν έχουμε μία συνάρτηση

$$\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n,$$

τότε στην περίπτωση $m \geq 2$ λέμε ότι η **f** είναι **διανυσματική** συνάρτηση, ενώ στην περίπτωση $m = 1$ λέμε ότι είναι **πραγματική** ή **βαθμωτή** συνάρτηση και χρησιμοποιούμε την συνήθη γραμματοσειρά, δηλαδή f αντί **f**:

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Οι συντεταγμένες συναρτήσεις μίας διανυσματικής συνάρτησης **f** είναι πραγματικές συναρτήσεις και γι αυτό τις γράφουμε $f_1, \dots, f_m$.

Ορισμός 1.1. *Στην περίπτωση πραγματικής συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ορίζουμε το* **γράφημα** *της f ως το σύνολο*

$$G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \,|\, \mathbf{x} \in U\} = \{(x_1,\dots,x_n, f(x_1,\dots,x_n)) \,|\, (x_1,\dots,x_n) \in U\}.$$

Το G_f είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$, αφού κάθε $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = (x_1,\dots,x_n, f(x_1,\dots,x_n))$ έχει $n+1$ πραγματικές συντεταγμένες.

Ορισμός 1.2. *Πάλι στην περίπτωση πραγματικής συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ορίζουμε τα* **ισοσταθμικά σύνολα** *της f ως εξής. Για κάθε $c \in \mathbb{R}$ το αντίστοιχο ισοσταθμικό σύνολο είναι το*

$$U_c = \{\mathbf{x} \in U \,|\, f(\mathbf{x}) = c\} = \{(x_1,\dots,x_n) \in U \,|\, f(x_1,\dots,x_n) = c\}.$$

Δηλαδή κάθε U_c είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και αποτελείται από όλα τα σημεία του U στα οποία η f έχει σταθερή τιμή c:

$$(x_1,\dots,x_n) \in U_c \quad \Leftrightarrow \quad (x_1,\dots,x_n) \in U,\ f(x_1,\dots,x_n) = c.$$

Αν ο αριθμός c δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f, τότε το αντίστοιχο ισοσταθμικό σύνολο U_c είναι κενό, αφού δεν υπάρχει κανένα $\mathbf{x} \in U$ ώστε $f(\mathbf{x}) = c$. Αν ο αριθμός c ανήκει στο σύνολο τιμών της f, τότε το αντίστοιχο ισοσταθμικό σύνολο U_c έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο.

Σε διαφορετικές τιμές c_1, c_2 του c στο σύνολο τιμών της f αντιστοιχούν *ξένα* ισοσταθμικά σύνολα U_{c_1}, U_{c_2}. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι τα U_{c_1}, U_{c_2} έχουν ένα κοινό στοιχείο **x**, τότε θα ήταν $f(\mathbf{x}) = c_1$ και $f(\mathbf{x}) = c_2$, οπότε η **f** δεν θα ήταν συνάρτηση.

Αν $n = 1$, τότε το γράφημα μίας πραγματικής συνάρτησης είναι, *συνήθως*, μία καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$. Αν $n = 2$, τότε το γράφημα μίας πραγματικής συνάρτησης είναι, *συνήθως*, μία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^2$. Σ' αυτές τις δύο περιπτώσεις υπάρχει πολλές φορές η δυνατότητα να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης, ειδικά αν αυτή είναι σχετικά απλή. Αν, όμως, $n \geq 3$, τότε το γράφημα είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$, όπου $n + 1 \geq 4$, και δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε.

Αν $n = 1$, ένα οποιοδήποτε ισοσταθμικό σύνολο μίας πραγματικής συνάρτησης αποτελείται, *συνήθως*, από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Αν $n = 2$, ένα οποιοδήποτε ισοσταθμικό σύνολο είναι, *συνήθως*, μία καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$. Αν $n = 3$, ένα οποιοδήποτε ισοσταθμικό σύνολο είναι, *συνήθως*, μία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Σ' αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να σχεδιάσουμε τα ισοσταθμικά σύνολα της συνάρτησης, αν αυτή είναι σχετικά απλή. Αν, όμως, $n \geq 4$, τότε, επειδή τα ισοσταθμικά σύνολα είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, δεν μπορούμε να τα σχεδιάσουμε.

Στην περίπτωση $n = 2$, όταν έχουμε πραγματική συνάρτηση

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^2,$$

το πεδίο ορισμού U της f βρίσκεται στο xy-επίπεδο, και το γράφημά της, το G_f, είναι συνήθως μία επιφάνεια στον xyz-χώρο και "πάνω" από το U (πάνω, όπου οι τιμές z της f είναι ≥ 0, και κάτω, όπου οι τιμές z της f είναι ≤ 0). Κάθε ισοσταθμική καμπύλη U_c περιέχεται στο U, δηλαδή είναι στο xy-επίπεδο, και ακριβώς από "πάνω" της, στον χώρο, και σε ύψος $z = c$ από το xy-επίπεδο βρίσκεται μία παράλληλη καμπύλη η οποία περιέχεται στο γράφημα της f. Αν πάρουμε την ένωση όλων αυτών των καμπυλών, των παράλληλων με τις ισοσταθμικές καμπύλες, θα σχηματιστεί η επιφάνεια/γράφημα της f.

Παράδειγμα 1.4. Το γράφημα G_f της πραγματικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = ax + by$$

είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, ax + by) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by - z = 0\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή το γράφημα είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) του χώρου τα οποία ικανοποιούν την καρτεσιανή εξίσωση

$$ax + by - z = 0,$$

και άρα είναι το επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανή εξίσωση $ax + by - z = 0$, δηλαδή το επίπεδο το οποίο περιέχει το σημείο $(0, 0, 0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $(a, b, -1)$.
Για κάθε $c \in \mathbb{R}$ το ισοσταθμικό σύνολο U_c της f είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} U_c &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}. \end{aligned}$$

Αν τα a, b δεν είναι και τα δύο 0, τότε το U_c είναι η ευθεία στο xy-επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $ax + by = c$. Στον χώρο, ακριβώς "πάνω" από αυτήν την ευθεία και σε ύψος $z = c$ από το xy-επίπεδο βρίσκεται μία παράλληλη ευθεία η οποία περιέχεται στο επίπεδο/γράφημα της συνάρτησης. Η ένωση όλων (δηλαδή, για όλες τις τιμές του c) αυτών των παράλληλων ευθειών σχηματίζει το επίπεδο/γράφημα της συνάρτησης.
Εξετάστε εσείς τα ισοσταθμικά σύνολα στην περίπτωση $a = b = 0$.

Παράδειγμα 1.5. Το γράφημα G_f της πραγματικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή το γράφημα είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) του χώρου τα οποία ικανοποιούν την καρτεσιανή εξίσωση

$$z = x^2 + y^2,$$

και άρα είναι το παραβολοειδές εκ περιστροφής στον $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανή εξίσωση $z = x^2 + y^2$.
Για κάθε $c \in \mathbb{R}$ το ισοσταθμικό σύνολο U_c της f είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} U_c &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = c\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = c\}. \end{aligned}$$

Αν $c < 0$, τότε το ισοσταθμικό σύνολο U_c της f είναι κενό.
Αν $c = 0$, τότε το ισοσταθμικό σύνολο U_c αποτελείται από ένα μόνο σημείο, το $(0, 0)$.
Για κάθε $c > 0$ το ισοσταθμικό σύνολο U_c είναι ο κύκλος στο xy-επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $x^2 + y^2 = c$, δηλαδή ο κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{c}$. Στον χώρο, ακριβώς πάνω από αυτόν τον κύκλο και σε ύψος $z = c > 0$ από το xy-επίπεδο βρίσκεται ένας παράλληλος κύκλος, με κέντρο το σημείο $(0, 0, c)$ και ακτίνα $\sqrt{c}$, ο οποίος περιέχεται στο παραβολοειδές εκ περιστροφής. Η ένωση όλων (δηλαδή για όλες τις θετικές τιμές του c) αυτών των παράλληλων κύκλων μαζί με το σημείο $(0, 0, 0)$ σχηματίζει το παραβολοειδές εκ περιστροφής, δηλαδή το γράφημα της f.

Παράδειγμα 1.6. Το γράφημα G_f της πραγματικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, f(x, y)) \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή το γράφημα είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) του χώρου τα οποία ικανοποιούν την καρτεσιανή εξίσωση

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

και άρα είναι ο κώνος στον $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανή εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Για κάθε $c \in \mathbb{R}$ το ισοσταθμικό σύνολο U_c της f είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} U_c &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = c\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{x^2 + y^2} = c\}. \end{aligned}$$

Αν $c < 0$, τότε το ισοσταθμικό σύνολο U_c της f είναι κενό.
Αν $c = 0$, τότε το ισοσταθμικό σύνολο U_c αποτελείται από ένα μόνο σημείο, το $(0, 0)$.
Για κάθε $c > 0$ το ισοσταθμικό σύνολο U_c είναι ο κύκλος στο xy-επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $x^2 + y^2 = c^2$, δηλαδή ο κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα c. Στον χώρο, ακριβώς πάνω από αυτόν τον κύκλο και σε ύψος $z = c > 0$ από το xy-επίπεδο βρίσκεται ένας παράλληλος κύκλος, με κέντρο το σημείο $(0, 0, c)$ και ακτίνα c, ο οποίος περιέχεται στον κώνο. Η ένωση όλων (δηλαδή για όλες τις θετικές τιμές του c) αυτών των παράλληλων κύκλων μαζί με το σημείο $(0, 0, 0)$ σχηματίζει τον κώνο, δηλαδή το γράφημα της f.

Παράδειγμα 1.7. Το γράφημα G_f της πραγματικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, z, f(x, y, z)) \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2) \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, w = x^2 + y^2 + z^2\}. \end{aligned}$$

Το γράφημα είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^4$ και δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε.
Για κάθε $c \in \mathbb{R}$ το ισοσταθμικό σύνολο U_c της f είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} U_c &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y,z) = c\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = c\}. \end{aligned}$$

Αν $c < 0$, τότε το ισοσταθμικό σύνολο U_c της f είναι κενό.
Αν $c = 0$, τότε το ισοσταθμικό σύνολο U_c αποτελείται από ένα μόνο σημείο, το $(0,0,0)$.
Για κάθε $c > 0$ το ισοσταθμικό σύνολο U_c είναι η σφαίρα στον xyz-χώρο με καρτεσιανή εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = c$, δηλαδή η σφαίρα με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{c}$.

1.2 Όριο συνάρτησης.

Θεωρούμε συνάρτηση

$$\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n,$$

και μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του σημείου $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ όταν το σημείο $\mathbf{x}$ μέσα από το U πλησιάζει κάποιο σημείο $\mathbf{x}_0$ χωρίς, όμως, να είναι ίσο με το $\mathbf{x}_0$. Το σημείο $\mathbf{x}_0$ μπορεί να είναι σημείο του U αλλά μπορεί και να μην είναι σημείο του U. Κυρίως, μας ενδιαφέρει αν το αντίστοιχο σημείο $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ πλησιάζει κάποιο σημείο $\mathbf{y}_0$.

Η κατάσταση η οποία περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο είναι εντελώς όμοια με την κατάσταση την οποία αντιμετωπίζουμε με πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή όταν $n = m = 1$. Μιλάμε για το λεγόμενο *όριο συνάρτησης*. Η μόνη διαφορά είναι τυπική: την απόσταση του $\mathbf{x}$ από το $\mathbf{x}_0$ στον $\mathbb{R}^n$ την μετράμε με την παράσταση $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, και όχι με την απλή απόλυτη τιμή $|x - x_0|$ την οποία θα χρησιμοποιούσαμε αν τα x, x_0 ήταν στο $\mathbb{R}$. Το ίδιο ισχύει και για την απόσταση του $\mathbf{y}$ από το $\mathbf{y}_0$ στον $\mathbb{R}^m$.

Έχουμε, λοιπόν, τον εξής ορισμό του ορίου συνάρτησης.

Ορισμός 1.3. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$.*
*Λέμε ότι το **όριο** της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$ είναι το $\mathbf{y}_0$, και συμβολίζουμε*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.
Με σύμβολα:

$$\mathbf{x} \in U, \; 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon.$$

Είναι πολύ σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι για να έχει νόημα το όριο της $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ στο $\mathbf{x}_0$ πρέπει να μπορεί το $\mathbf{x}$ μέσα από το U να πλησιάσει το $\mathbf{x}_0$ παραμένοντας διαφορετικό από το $\mathbf{x}_0$. Με άλλα λόγια, όσο μικρό κι αν είναι το $\delta > 0$ πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x} \in U$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

Παράδειγμα 1.8. Ας θεωρήσουμε την πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών $f : U \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \log(x + y - 1).$$

Ερώτηση: έχει νόημα το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \log(x + y - 1)$;
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι προφανώς το $U = \{(x,y) \,|\, x + y > 1\}$.
Το U είναι το ημιεπίπεδο στο xy-επίπεδο το οποίο βρίσκεται στην πάνω μεριά της ευθείας με καρτεσιανή εξίσωση $x + y = 1$. Το σημείο $(0,0)$ περιέχεται στο άλλο ημιεπίπεδο, αυτό που βρίσκεται στην κάτω μεριά της ίδιας ευθείας, και η απόσταση του $(0,0)$ από την ευθεία είναι ίση με $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Δηλαδή κάθε σημείο (x,y) του U απέχει τουλάχιστον $\frac{1}{\sqrt{2}}$ από το σημείο $(0,0)$, οπότε δεν μπορεί να πλησιάσει το $(0,0)$.
Άρα δεν έχει νόημα το παραπάνω όριο.

Τώρα θα αναφέρουμε (και θα αποδείξουμε) διάφορες ιδιότητες των ορίων και μετά θα δούμε αρκετά παραδείγματα υπολογισμού ορίων. Οι ιδιότητες αυτές είναι εντελώς ανάλογες ιδιοτήτων ορίων στην περίπτωση $n = m = 1$. Σε όλες τις αποδείξεις θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο η **τριγωνική ανισότητα** την οποία ικανοποιούν τα μήκη διανυσμάτων:

$$\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \le \|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Κατ' αρχάς έχουμε τον *κανόνα αθροίσματος*.

Πρόταση 1.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f}, \mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$. Αν υπάρχουν τα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ στον $\mathbb{R}^m$, τότε υπάρχει και το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ στον $\mathbb{R}^m$, και*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}_0$.
Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \frac{\epsilon}{2}$ και $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_0\| < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε θα γίνει

$$\|(\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{g}(\mathbf{x}))-(\mathbf{y}_0+\mathbf{z}_0)\| = \|(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}_0)+(\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{z}_0)\| \le \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}_0\|+\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{z}_0\| < \tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}_0$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ο *κανόνας γινομένου*. Θα θεωρήσουμε την απλή περίπτωση κατά την οποία πολλαπλασιάζουμε πραγματική συνάρτηση και διανυσματική συνάρτηση. Έτσι, όταν πολλαπλασιάζουμε τις τιμές τους (δηλαδή, αριθμό και διάνυσμα) προκύπτει διάνυσμα, οπότε το γινόμενο των δύο συναρτήσεων είναι διανυσματική συνάρτηση: αν $f : U \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$, τότε $f\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$.

Πρόταση 1.2. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f : U \to \mathbb{R}$, και $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$. Αν υπάρχουν τα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ στον $\mathbb{R}^m$, τότε υπάρχει και το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})$ στον $\mathbb{R}^m$, και*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = y_0$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}_0$.
Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $|f(\mathbf{x}) - y_0| < \min\big\{(\frac{\epsilon}{3})^{1/2}, \frac{\epsilon}{3\|\mathbf{z}_0\|+1}\big\}$ και $|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_0| < \min\big\{(\frac{\epsilon}{3})^{1/2}, \frac{\epsilon}{3|y_0|+1}\big\}$, οπότε θα γίνει

$$\begin{aligned}
\|f(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) - y_0\mathbf{z}_0\| &= \|(f(\mathbf{x}) - y_0)(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_0) + y_0(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_0) + (f(\mathbf{x}) - y_0)\mathbf{z}_0\| \\
&\le |f(\mathbf{x}) - y_0|\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_0\| + |y_0|\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_0\| + |f(\mathbf{x}) - y_0|\|\mathbf{z}_0\| \\
&< (\tfrac{\epsilon}{3})^{1/2}(\tfrac{\epsilon}{3})^{1/2} + \tfrac{|y_0|\epsilon}{3|y_0|+1} + \tfrac{\|\mathbf{z}_0\|\epsilon}{3\|\mathbf{z}_0\|+1} \\
&< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = y_0\mathbf{z}_0$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ο *κανόνας λόγου*.

Πρόταση 1.3. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f : U \to \mathbb{R}$, και $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$, και έστω ότι ισχύει $f(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$. Αν υπάρχουν τα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ στον $\mathbb{R}^m$, και αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \neq 0$, τότε υπάρχει και το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(\mathbf{g}(\mathbf{x})/f(\mathbf{x}))$ στον $\mathbb{R}^m$, και*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \tfrac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = y_0 \neq 0$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}_0$.
Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $|f(\mathbf{x}) - y_0| < \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{y_0^2\epsilon}{4\|\mathbf{z}_0\|+1}\right\}$ και $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_0\| < \frac{|y_0|\epsilon}{4}$, οπότε θα γίνει

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} - \frac{\mathbf{z}_0}{y_0}\right| &= \left|\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{z}_0}{f(\mathbf{x})} - \frac{(f(\mathbf{x})-y_0)\mathbf{z}_0}{y_0 f(\mathbf{x})}\right| \leq \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{z}_0\|}{|f(\mathbf{x})|} + \frac{|f(\mathbf{x})-y_0|\|\mathbf{z}_0\|}{|y_0|\,|f(\mathbf{x})|} \\ &\leq \frac{2\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{z}_0\|}{|y_0|} + \frac{2|f(\mathbf{x})-y_0|\|\mathbf{z}_0\|}{y_0^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{z}_0}{y_0}$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το ανάλογο του *κανόνα απολύτου* όταν οι συναρτήσεις είναι πραγματικές. Αν $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ με $m \geq 2$, τότε οι τιμές $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι στον $\mathbb{R}^m$, οπότε δεν έχει νόημα η απόλυτη τιμή τους. Σ' αυτήν την περίπτωση θεωρούμε τα μήκη $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ και ορίζουμε την συνάρτηση $\|\mathbf{f}\| : U \to \mathbb{R}$ με τύπο $\|\mathbf{f}\|(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ για $\mathbf{x} \in U$.

Πρόταση 1.4. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$. Αν υπάρχει το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ στον $\mathbb{R}^m$, τότε υπάρχει και το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ στο $\mathbb{R}$, και*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})\|.$$

Το αντίστροφο ισχύει μόνο σε μία περίπτωση: όταν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Δηλαδή,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$.
Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon$, και άρα θα γίνει

$$\big|\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| - \|\mathbf{y}_0\|\big| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{y}_0\|$.
Αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, τότε από αυτό το οποίο αποδείξαμε έχουμε ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{0}\| = 0$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = 0$.
Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $\big|\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| - 0\big| < \epsilon$, και άρα θα γίνει

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \big|\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| - 0\big| < \epsilon.$$

Επομένως, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. □

Πρόταση 1.5. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$, και έστω $f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{R}$ οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$. Επίσης, έστω $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0m})$. Τότε*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = y_{0i},\ i = 1, \dots, m.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$.
Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon$, και άρα για κάθε $i = 1, \dots, m$ θα γίνει

$$|f_i(\mathbf{x}) - y_{0i}| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon.$$

(Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $|a_i| \leq \|\mathbf{a}\|$ για $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$.)
Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = y_{0i}$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = y_{0i}$ για κάθε $i = 1, \dots, m$.
Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $|f_i(\mathbf{x}) - y_{0i}| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}$ για κάθε $i = 1, \dots, m$, οπότε θα γίνει

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| = \sqrt{|f_1(\mathbf{x}) - y_{01}|^2 + \cdots + |f_m(\mathbf{x}) - y_{0m}|^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{m}} = \sqrt{m\,\frac{\epsilon^2}{m}} = \epsilon.$$

Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$. □

Η πρόταση 1.5 είναι πολύ βοηθητική όταν μελετάμε όριο διανυσματικής συνάρτησης. Αντί να βρούμε το όριο της δοσμένης διανυσματικής συνάρτησης, βρίσκουμε τα όρια των συντεταγμένων συναρτήσεων οι οποίες είναι πραγματικές, οπότε απλοποιείται κάπως το πρόβλημα.

Πρόταση 1.6. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f, g : U \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ για $\mathbf{x} \in U$ κοντά στο $\mathbf{x}_0$, και αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = y_0$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = z_0$, τότε $y_0 \leq z_0$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $z_0 < y_0$, οπότε ο αριθμός $\frac{y_0-z_0}{2}$ είναι θετικός. Επειδή $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = y_0$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = z_0$, όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει

$$|f(\mathbf{x}) - y_0| < \tfrac{y_0-z_0}{2}, \quad |g(\mathbf{x}) - z_0| < \tfrac{y_0-z_0}{2}$$

και, επομένως,

$$f(\mathbf{x}) > y_0 - \tfrac{y_0-z_0}{2} = \tfrac{y_0+z_0}{2}, \quad g(\mathbf{x}) < z_0 + \tfrac{y_0-z_0}{2} = \tfrac{y_0+z_0}{2}.$$

Άρα, όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $f(\mathbf{x}) > \frac{y_0+z_0}{2} > g(\mathbf{x})$, το οποίο αντιφάσκει με το ότι ισχύει $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ κοντά στο $\mathbf{x}_0$. □

Πρόταση 1.7. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f : U \to \mathbb{R}$, και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = y_0$ στο $\mathbb{R}$.*
(i) Αν $y_0 < u$, τότε ισχύει $f(\mathbf{x}) < u$ για $\mathbf{x} \in U$ κοντά στο $\mathbf{x}_0$.
(ii) Αν $l < y_0$, τότε ισχύει $l < f(\mathbf{x})$ για $\mathbf{x} \in U$ κοντά στο $\mathbf{x}_0$.

Απόδειξη. (i) Το $u - y_0$ είναι θετικός αριθμός. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα ισχύει $|f(\mathbf{x}) - y_0| < u - y_0$, και άρα $f(\mathbf{x}) < y_0 + (u - y_0) = u$.
(ii) Ομοίως. □

Ορισμός 1.4. *Έστω $V \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f : U \to \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι* **φραγμένη** *στο σύνολο V αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M$ για κάθε $\mathbf{x} \in V$.*

Πρόταση 1.8. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f : U \to \mathbb{R}^m$, και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ στον $\mathbb{R}^m$. Τότε η $\mathbf{f}$ είναι φραγμένη κοντά στο $\mathbf{x}_0$.*

Απόδειξη. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα ισχύει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < 1$, και άρα το $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ θα περιέχεται στο φραγμένο διάστημα $[\|\mathbf{y}_0\| - 1, \|\mathbf{y}_0\| + 1]$. Άρα η $\mathbf{f}$ είναι φραγμένη κοντά στο $\mathbf{x}_0$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ο *κανόνας παρεμβολής*.

Πρόταση 1.9. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f, g, h : U \to \mathbb{R}$, και έστω ότι ισχύει $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ για $\mathbf{x} \in U$ κοντά στο $\mathbf{x}_0$. Αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = y_0$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = y_0$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = y_0$.*

Απόδειξη. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $|f(\mathbf{x}) - y_0| < \epsilon$ και $|h(\mathbf{x}) - y_0| < \epsilon$, και άρα θα γίνει

$$y_0 - \epsilon < f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) < y_0 + \epsilon,$$

δηλαδή $|g(\mathbf{x}) - y_0| < \epsilon$. Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = y_0$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ο *κανόνας αλλαγής μεταβλητής* ή *κανόνας αντικατάστασης*.

Πρόταση 1.10. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{f} : U \to V$ και $\mathbf{g} : V \to \mathbb{R}^k$. Αν υπάρχει το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ και υπάρχει και το $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} \mathbf{g}(\mathbf{y})$ στο $\mathbb{R}^k$, και αν ισχύει $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_0$ για $\mathbf{x} \in U$ κοντά στο $\mathbf{x}_0$, τότε υπάρχει και το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ στο $\mathbb{R}^k$, και*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} \mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}_0$ και $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0}\mathbf{g}(\mathbf{y})=\mathbf{z}_0$ και, επιπλέον, ότι ισχύει $\mathbf{f}(\mathbf{x})\neq\mathbf{y}_0$ για $\mathbf{x}\in U$ κοντά στο $\mathbf{x}_0$.
Παίρνουμε $\epsilon>0$. Όταν το $\mathbf{y}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{y}_0$ και είναι $\neq\mathbf{y}_0$ τότε θα γίνει $\|\mathbf{g}(\mathbf{y})-\mathbf{z}_0\|<\epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\delta>0$ ώστε, αν γίνει $\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|<\delta$ και $\mathbf{y}\neq\mathbf{y}_0$, τότε θα γίνει $\|\mathbf{g}(\mathbf{y})-\mathbf{z}_0\|<\epsilon$. Τώρα, όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq\mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}_0\|<\delta$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x})\neq\mathbf{y}_0$, οπότε θα γίνει $\|\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))-\mathbf{z}_0\|<\epsilon$. Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{z}_0$. □

Ας δούμε τώρα μερικές τεχνικές *εύρεσης ορίου* ή απόδειξης *μη-ύπαρξης ορίου*.
Πρώτη τεχνική. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})=\mathbf{y}_0$, γράφουμε

$$0\leq\|f(\mathbf{x})-\mathbf{y}_0\|\leq\ldots\leq g(\mathbf{x}),$$

όπου ξεκινάμε από την παράσταση $\|f(\mathbf{x})-\mathbf{y}_0\|$, και, εφαρμόζοντας κατάλληλες ανισότητες προς τα πάνω, φτάνουμε κάποια στιγμή σε μία απλούστερη πραγματική $g(\mathbf{x})$ η οποία εμφανώς έχει όριο 0 στο $\mathbf{x}_0$. Κατόπιν εφαρμόζουμε το γνωστό κριτήριο παρεμβολής.

Δεύτερη τεχνική. Αν $\mathbf{x}\to\mathbf{0}$, τότε μπορούμε να κάνουμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες, αν το $\mathbf{x}$ είναι στον $\mathbb{R}^2$, ή σε σφαιρικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες, αν το $\mathbf{x}$ είναι στον $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιούμε τους γνωστούς τύπους:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta. \tag{1.1}$$

$$x=\rho\cos\theta\sin\phi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\phi,\quad z=\rho\cos\phi. \tag{1.2}$$

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z. \tag{1.3}$$

Οι τύποι (1.1) είναι οι τύποι αλλαγής ανάμεσα σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες στο xy-επίπεδο. Πρέπει να είναι $(x,y)\neq(0,0)$, και τότε $0<r<+\infty$ και $0\leq\theta<2\pi$.
Οι τύποι (1.2) είναι οι τύποι αλλαγής ανάμεσα σε καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες στον xyz-χώρο. Πρέπει να είναι $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, και τότε $0<\rho<+\infty$, $0\leq\theta<2\pi$ και $0\leq\phi\leq\pi$.
Οι τύποι (1.3) είναι οι τύποι αλλαγής ανάμεσα σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες στον xyz-χώρο. Πρέπει να είναι $(x,y,z)\neq(0,0,z)$, δηλαδή το (x,y,z) δεν πρέπει να βρίσκεται στον z-άξονα, και τότε $0<r<+\infty$ και $0\leq\theta<2\pi$.
Χρησιμοποιούμε και τις αντίστοιχες ισοδυναμίες:

$$(x,y)\to(0,0)\quad\Leftrightarrow\quad r\to 0+$$

$$(x,y,z)\to(0,0,0)\quad\Leftrightarrow\quad \rho\to 0+$$

$$(x,y,z)\to(0,0,0)\quad\Leftrightarrow\quad (r,z)\to(0+,0)$$

οι οποίες προκύπτουν από τις σχέσεις: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ και $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Μερικές φορές, όταν $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$ στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ και $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{0}$, τότε μπορούμε να κάνουμε την λεγόμενη “μεταφορά”, δηλαδή να αλλάξουμε μεταβλητή από $\mathbf{x}$ σε

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,$$

οπότε $\mathbf{x}'\to\mathbf{0}$ και τότε μπορούμε να εργαστούμε με τις πολικές ή σφαιρικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες του $\mathbf{x}'$.

Τρίτη τεχνική. Το ότι ισχύει $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})=\mathbf{y}_0$ σημαίνει ότι το $f(\mathbf{x})$ τείνει στο $\mathbf{y}_0$ όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$, **ανεξάρτητα** από τον τρόπο με τον οποίο το $\mathbf{x}$ πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$.
Υπάρχουν περιπτώσεις όπου συμβαίνει το εξής. Όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$ με έναν συγκεκριμένο τρόπο (π.χ. κινούμενο πάνω σε μία συγκεκριμένη ημιευθεία με κορυφή το $\mathbf{x}_0$) το αντίστοιχο $f(\mathbf{x})$ τείνει σε κάποιο όριο, ενώ όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$ με έναν συγκεκριμένο τρόπο, αλλά διαφορετικό από τον προηγούμενο (π.χ. κινούμενο πάνω σε μία συγκεκριμένη ημιευθεία με κορυφή το $\mathbf{x}_0$, αλλά διαφορετική από την προηγούμενη ημιευθεία), το αντίστοιχο $f(\mathbf{x})$ τείνει σε κάποιο όριο διαφορετικό από το προηγούμενο όριο. Τότε συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})$ **δεν** υπάρχει.

Παράδειγμα 1.9. Αποδεικνύουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ με δύο τρόπους.
Χρησιμοποιούμε το ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2 + y^2) = 0$ και το ότι $\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$, καθώς και τον κανόνα ορίου σύνθετης συνάρτησης. Δηλαδή, κάνουμε την αντικατάσταση $t = x^2 + y^2$, και γράφουμε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Επίσης, χρησιμοποιούμε τους τύπους αλλαγής σε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ και γράφουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0+} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1.$$

Παράδειγμα 1.10. Αποδεικνύουμε με δύο τρόπους ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.
Το όριο προκύπτει από την ανισότητα

$$0 \le \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x||x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0,$$

διότι $\sqrt{x^2+y^2} \to 0+$ όταν $(x,y)\to(0,0)$.
Επίσης, το όριο προκύπτει μετά από αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες με τους τύπους $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Γράφουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0+} \frac{r^2\cos^2\theta}{r} = \lim_{r\to 0+} r\cos^2\theta = 0,$$

διότι $r \to 0+$ και το $\cos^2\theta$ είναι φραγμένο.

Παράδειγμα 1.11. Έχουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.
Αυτό προκύπτει από την ανισότητα

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \le \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0.$$

Επίσης, με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0,$$

διότι $r \to 0+$ και το $\cos^2\theta\sin\theta$ είναι φραγμένο.

Παράδειγμα 1.12. Έχουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)^2(y-2)}{(x+1)^2+(y-2)^2} = 0$.
Το (x,y) δεν τείνει στο $(0,0)$, οπότε κάνουμε "μεταφορά", δηλαδή την αντικατάσταση

$$(x', y') = (x,y) - (-1,2) = (x+1, y-2),$$

και τότε $(x',y') \to (0,0)$. Έτσι αναγόμαστε στο όριο $\lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{x'^2 y'}{x'^2+y'^2} = 0$, το οποίο μελετήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα με πολικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 1.13. Έχουμε ότι $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$.
Αυτό προκύπτει από την ανισότητα

$$0 \le \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to 0.$$

Επίσης, με τους τύπους αλλαγής σε σφαιρικές συντεταγμένες $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$, $z = \rho\cos\phi$ γράφουμε

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\to 0+} \frac{\rho^3\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\cos\phi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0+} \rho\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\cos\phi = 0,$$

διότι $\rho \to 0+$ και το $\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\cos\phi$ είναι φραγμένο.

Παράδειγμα 1.14. Το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.
Η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ τείνει σε ένα όριο όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω στον x-άξονα, και σε διαφορετικό όριο όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω στον y-άξονα. Όταν το (x,y) κινείται πάνω στον x-άξονα έχουμε $y=0$ και $x\to 0$, οπότε

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2+0^2} = 1 \to 1.$$

Όταν το (x,y) κινείται πάνω στον y-άξονα έχουμε $x=0$ και $y\to 0$, οπότε

$$f(0,y) = \frac{0^2}{0^2+y^2} = 0 \to 0.$$

Παράδειγμα 1.15. Το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.
Δοκιμάζοντας τις τιμές της συνάρτησης $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω στον x-άξονα και όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω στον y-άξονα, βρίσκουμε τα ίδια όρια. Όταν το (x,y) κινείται πάνω στον x-άξονα έχουμε $y=0$ και $x\to 0$, οπότε

$$f(x,0) = \frac{x0}{x^2+0^2} = 0 \to 0.$$

Όταν το (x,y) κινείται πάνω στον y-άξονα έχουμε $x=0$ και $y\to 0$, οπότε

$$f(0,y) = \frac{0y}{0^2+y^2} = 0 \to 0.$$

Όμως, όταν το (x,y) κινείται πάνω στην κύρια διαγώνιο με την καρτεσιανή εξίσωση $y=x$ έχουμε $(x,y)=(x,x)$ και $x\to 0$, οπότε

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Μπορούμε, επίσης, να πάρουμε περισσότερη πληροφορία, δοκιμάζοντας τις τιμές της f όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω σε ημιευθεία η οποία σχηματίζει πολική γωνία θ με τον θετικό x-άξονα. Χρησιμοποιούμε τους τύπους αλλαγής σε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω σε ημιευθεία η οποία σχηματίζει πολική γωνία θ με τον θετικό x-άξονα τότε έχουμε ότι $r\to 0+$ και ότι το θ είναι συγκεκριμένο και *σταθερό*. Τότε

$$\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0+} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0+} \cos\theta\sin\theta = \cos\theta\sin\theta.$$

Άρα η τιμή του ορίου εξαρτάται από την γωνία θ και έχει διαφορετικές τιμές όταν αλλάζουμε την ημιευθεία προσέγγισης του (x,y) στο $(0,0)$.

Παράδειγμα 1.16. Το $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ δεν υπάρχει.
Δοκιμάζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x,y,z) = \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ όταν το (x,y,z) πλησιάζει το $(0,0,0)$ κινούμενο πάνω σε ημιευθεία η οποία σχηματίζει σφαιρικές γωνίες θ,ϕ. Με τους τύπους αλλαγής σε σφαιρικές συντεταγμένες $x=\rho\cos\theta\sin\phi$, $y=\rho\sin\theta\sin\phi$, $z=\rho\cos\phi$ έχουμε ότι $\rho\to 0+$ και τα θ,ϕ είναι συγκεκριμένα και *σταθερά*. Τότε

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0+} f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi) &= \lim_{\rho\to 0+} \frac{r^3\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\cos\phi}{r^3} \\ &= \lim_{\rho\to 0+} \cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\cos\phi \\ &= \cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\cos\phi.\end{aligned}$$

Άρα η τιμή του ορίου εξαρτάται από τις γωνίες θ,ϕ και έχει διαφορετικές τιμές όταν αλλάζουμε την ημιευθεία προσέγγισης του (x,y,z) στο $(0,0,0)$.

Παράδειγμα 1.17. Το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ δεν υπάρχει.
Δοκιμάζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ όταν το (x,y) πλησιάζει στο $(0,0)$ κινούμενο πάνω σε ημιευθεία η οποία σχηματίζει πολική γωνία θ με τον θετικό x-άξονα. Χρησιμοποιούμε, λοιπόν, πολικές συντεταγμένες: όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω σε ημιευθεία η οποία σχηματίζει πολική γωνία θ με τον θετικό x-άξονα τότε έχουμε ότι $r\to 0+$ ενώ η πολική γωνία θ είναι συγκεκριμένη και *σταθερή*. Αν $\sin\theta\neq 0$ (δηλαδή $\theta\neq 0,\pi$), τότε

$$\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0+} \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta} = \frac{0}{\sin^2\theta} = 0.$$

Αν $\sin\theta = 0$ (οπότε $\cos\theta = \pm 1$), τότε

$$\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0+} \frac{0}{r^4} = \lim_{r\to 0+} 0 = 0.$$

Άρα η τιμή του ορίου είναι ίδια και ίση με 0 ανεξάρτητα από την ημιευθεία προσέγγισης του (x,y) στο $(0,0)$.
Γιατί, λοιπόν, είπαμε ότι το όριο της συνάρτησης δεν υπάρχει;
Αν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω στην παραβολή με καρτεσιανή εξίσωση $y=x^2$, τότε το σημείο έχει τη μορφή $(x,y)=(x,x^2)$ και $x\to 0$. Άρα για τις αντίστοιχες τιμές της f έχουμε

$$f(x,x^2) = \frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2},$$

και αυτό το όριο είναι διαφορετικό από το 0, το οποίο είναι το όριο όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω σε οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το $(0,0)$.

1.3 Συνέχεια συνάρτησης.

Θεωρούμε συνάρτηση

$$\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Η έννοια της συνέχειας της $\mathbf{f}$ σε σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$ ορίζεται όπως και στην περίπτωση $n=m=1$.

Ορισμός 1.5. *Έστω $U\subseteq\mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f} : U\to\mathbb{R}^m$, και $\mathbf{x}_0\in U$.*
Λέμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|<\epsilon$ για κάθε $\mathbf{x}\in U$ με $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta$. Με σύμβολα:

$$\mathbf{x}\in U,\ \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta \quad\Rightarrow\quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|<\epsilon.$$

Δηλαδή, το ότι η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ σημαίνει ότι όταν το σημείο $\mathbf{x}$ μέσα από το U πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$ τότε το $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ πλησιάζει απεριόριστα το $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Όπως στην περίπτωση $n=m=1$ μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν έχει νόημα το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x})$, δηλαδή όταν το $\mathbf{x}$ *μπορεί* να πλησιάσει μέσα από το U το $\mathbf{x}_0$ και να είναι $\neq \mathbf{x}_0$. Με άλλα λόγια, όσο μικρό κι αν είναι το $\delta>0$ πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x}\in U$ με $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι το να είναι η $\mathbf{f}$ συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ ισοδυναμεί με

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν δεν έχει νόημα το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x})$, δηλαδή όταν το $\mathbf{x}$ *δεν μπορεί* να πλησιάσει μέσα από το U το $\mathbf{x}_0$ και να είναι $\neq\mathbf{x}_0$. Με άλλα λόγια, όταν υπάρχει κάποιο $\delta_0>0$ ώστε κανένα $\mathbf{x}\in U$ να μην ικανοποιεί την $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta_0$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι **μεμονωμένο σημείο** του U. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι, αυτομάτως, συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Ακολουθούν διάφορες ιδιότητες της συνέχειας. Όλες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας αντίστοιχες ιδιότητες του ορίου.

Πρόταση 1.11. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f}, \mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{x}_0 \in U$. Αν οι $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, τότε και η $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

Πρόταση 1.12. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f : U \to \mathbb{R}$, και $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{x}_0 \in U$. Αν οι $f, \mathbf{g}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, τότε και η $f\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

Πρόταση 1.13. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $f : U \to \mathbb{R}$, και $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{x}_0 \in U$, και έστω ότι ισχύει $f(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$. Αν οι $f, \mathbf{g}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, τότε και η $\frac{\mathbf{g}}{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

Πρόταση 1.14. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{x}_0 \in U$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, τότε και η $\|\mathbf{f}\|$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

Πρόταση 1.15. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{x}_0 \in U$, και έστω $f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{R}$ οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$. Τότε η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν όλες οι $f_1, \dots, f_m$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$.*

Πρόταση 1.16. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{x}_0 \in U$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, τότε η $\mathbf{f}$ είναι φραγμένη κοντά στο $\mathbf{x}_0$.*

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ο *κανόνας σύνθεσης*.

Πρόταση 1.17. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{f} : U \to V$ και $\mathbf{g} : V \to \mathbb{R}^k$, και $\mathbf{x}_0 \in U$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 \in V$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ και η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{y}_0$, τότε η $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{y} \in V$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{y}_0$ τότε θα γίνει $|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)| < \epsilon$. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε, αν γίνει $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta$, τότε θα γίνει $\|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\| < \epsilon$. Τώρα, όταν το $\mathbf{x} \in U$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \delta$, και άρα θα γίνει $\|\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\| < \epsilon$. Άρα η $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένας δεύτερος *κανόνας αλλαγής μεταβλητής* ή *κανόνας αντικατάστασης*.

Πρόταση 1.18. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{f} : U \to V$ και $\mathbf{g} : V \to \mathbb{R}^k$, και $\mathbf{y}_0 \in V$. Αν υπάρχει το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ και αν η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{y}_0$, τότε υπάρχει το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, και*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0).$$

Απόδειξη. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το $\mathbf{y}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{y}_0$ τότε θα γίνει $\|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\| < \epsilon$. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε, αν γίνει $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta$, τότε θα γίνει $\|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\| < \epsilon$. Τώρα, όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάσει αρκετά το $\mathbf{x}_0$ και είναι $\neq \mathbf{x}_0$ τότε θα γίνει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \delta$, οπότε θα γίνει $\|\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\| < \epsilon$. Άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$. □

Τώρα θα δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 1.18. Θεωρούμε τις συναρτήσεις οι οποίες ονομάζονται **συναρτήσεις προβολές**. Αυτές είναι οι $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, για $i = 1, \dots, n$, με τύπους

$$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \quad \text{για κάθε } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Δηλαδή, η π_i αντιστοιχίζει σε κάθε n-άδα την i συντεταγμένη της.
Είναι εύκολο να δούμε ότι η π_i είναι συνεχής σε κάθε $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \epsilon$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ για το οποίο ισχύει $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ συνεπάγεται

$$|\pi_i(\mathbf{x}) - \pi_i(\mathbf{x}_0)| = |x_i - x_{0i}| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta = \epsilon.$$

(Χρησιμοποιούμε το ότι $|a_i| \leq \|\mathbf{a}\|$ όταν $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$.)
Άρα η π_i είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Παράδειγμα 1.19. Μία συνάρτηση $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **πολυωνυμική** αν ο τύπος της έχει την μορφή
$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum \lambda x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$
Δηλαδή, το $p(x_1, \dots, x_n)$ είναι ένα *πεπερασμένο* άθροισμα κάθε όρος του οποίου είναι γινόμενο σταθεράς και δυνάμεων των συντεταγμένων $x_1, \dots, x_n$ με ακέραιους εκθέτες $k_1, \dots, k_n \geq 0$. Επομένως, κάθε όρος είναι γινόμενο σταθεράς και των συναρτήσεων προβολών $\pi_1, \dots, \pi_n$, όπου κάθε π_i εμφανίζεται k_i φορές στο γινόμενο. Άρα κάθε όρος είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n$. Έτσι η πολυωνυμική συνάρτηση p είναι πεπερασμένο άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε είναι κι αυτή συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 1.20. Μία συνάρτηση $r : U \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **ρητή** αν είναι λόγος $r = \frac{p}{q}$ πολυωνυμικών συναρτήσεων $p, q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού U της r είναι ο $\mathbb{R}^n$ εκτός των σημείων στα οποία μηδενίζεται η συνάρτηση q, δηλαδή $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, q(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Επειδή οι πολυωνυμικές συναρτήσεις p, q είναι συνεχείς στον $\mathbb{R}^n$, είναι συνεχείς και στο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$. Επομένως, η $r = \frac{p}{q}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της U.

Παράδειγμα 1.21. Θεωρούμε την $f : U \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x, y, z) = e^{\sin(x^2+yz)} + \log(x + y + z).$$
Το πεδίο ορισμού είναι το $U = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z > 0\}$ και είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.
Τώρα, η συνάρτηση $x^2 + yz$ είναι πολυωνυμική από τον $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}$, και είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^3$. Κατόπιν, η συνάρτηση $e^{\sin(x^2+yz)}$ είναι σύνθεση της $x^2 + yz$ από τον $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}$, και της συνεχούς $\sin$ από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και της συνεχούς εκθετικής από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Άρα η $e^{\sin(x^2+yz)}$ από τον $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^3$, οπότε είναι συνεχής και στο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^3$.
Επίσης, η συνάρτηση $x + y + z$ είναι πολυωνυμική από τον $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}$, και είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^3$. Επομένως, ο περιορισμός της από το U στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής στο U. Κατόπιν, η συνάρτηση $\log(x + y + z)$ είναι σύνθεση της $x + y + z$ από το U στο $(0, +\infty)$ και της συνεχούς $\log$ από το $(0, +\infty)$ στο $\mathbb{R}$. Άρα η $\log(x + y + z)$ από το U στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο U.
Η f είναι άθροισμα των $e^{\sin(x^2+yz)}$, $\log(x + y + z)$. Επειδή και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς στο U, η f είναι κι αυτή συνεχής στο U.

Γενικεύοντας το τελευταίο παράδειγμα, μπορούμε να πούμε ότι κάθε *πραγματική* συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ο τύπος της οποίας είναι απλός συνδυασμός (αλγεβρικές πράξεις και συνθέσεις) πολυωνυμικών, ρητών, εκθετικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων των συντεταγμένων της ανεξάρτητης μεταβλητής $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, είναι συνεχής στο U.

Τέλος, γενικεύοντας ακόμη περισσότερο, μπορούμε να πούμε ότι κάθε *διανυσματική* συνάρτηση $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, της οποίας οι συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{R}$ είναι του τύπου της προηγούμενης παραγράφου, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 1.22. Η $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^2$ με τύπο
$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x/y, x^2 \sin(e^y))$$
έχει πεδίο ορισμού το $U = \{(x, y, z) \,|\, y \neq 0\}$ το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο U, διότι οι συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1(x, y, z) = x/y$ και $f_2(x, y, z) = x^2 \sin(e^y)$ είναι συνεχείς στο U.

Κεφάλαιο 2

Παράγωγος συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

2.1 Ανοικτά σύνολα και κλειστά σύνολα.

Ορισμός 2.1. *Αν* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *και* $r > 0$, *η* **μπάλα** *με κέντρο* $\mathbf{x}$ *και ακτίνα* r *είναι το σύνολο των σημείων* $\mathbf{y}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *τα οποία απέχουν από το* $\mathbf{x}$ *απόσταση μικρότερη από* r. *Την μπάλα αυτή την συμβολίζουμε* $B_r(\mathbf{x})$, *οπότε*

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

Αν $n = 3$, τότε η έννοια της μπάλας, όπως την ορίσαμε, ταυτίζεται με την γνωστή έννοια της μπάλας στον χώρο. Αν $n = 2$, τότε η έννοια της μπάλας ταυτίζεται με την γνωστή έννοια του δίσκου στο επίπεδο. Ενώ, αν $n = 1$, η έννοια της μπάλας ταυτίζεται με την γνωστή έννοια του διαστήματος στην ευθεία.

Ορισμός 2.2. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *και* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(i) Το $\mathbf{x}$ *χαρακτηρίζεται* **εσωτερικό σημείο** *του* U, *αν υπάρχει* $r > 0$ *ώστε* $B_r(\mathbf{x}) \subseteq U$ *ή, ισοδύναμα, ώστε κάθε* $\mathbf{y}$ *το οποίο απέχει από το* $\mathbf{x}$ *λιγότερο από* r *να περιέχεται στο* U.
(ii) Το x *χαρακτηρίζεται* **συνοριακό σημείο** *του* U, *αν για κάθε* $r > 0$ *η μπάλα* $B_r(\mathbf{x})$ *τέμνει το* U *αλλά και το συμπληρωματικό σύνολο του* U *ή, ισοδύναμα, ώστε για κάθε* $r > 0$ *υπάρχουν σημεία του* U *και σημεία έξω από το* U *τα οποία απέχουν από το* $\mathbf{x}$ *λιγότερο από* r.

Θα χρησιμοποιούμε το γνωστό σύμβολο

$$U^c$$

για το συμπληρωματικό σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus U$ ενός συνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήστε ότι ένα εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}$ του συνόλου U είναι οπωσδήποτε στοιχείο του U. Πράγματι, αφού υπάρχει κάποια μπάλα $B_r(\mathbf{x})$ η οποία περιέχεται στο U, τότε το $\mathbf{x}$, δηλαδή το κέντρο της μπάλας, περιέχεται κι αυτό στο U. Όμως, ένα συνοριακό σημείο $\mathbf{x}$ του U μπορεί να είναι στοιχείο του U αλλά μπορεί και να είναι στοιχείο του συμπληρωματικού συνόλου U^c.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι ένα στοιχείο $\mathbf{x}$ του U είναι είτε εσωτερικό σημείο του είτε συνοριακό σημείο του. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το $\mathbf{x}$ *δεν* είναι εσωτερικό σημείο του U. Τότε για κάθε $r > 0$ η μπάλα $B_r(\mathbf{x})$ δεν περιέχεται στο U, και άρα τέμνει το συμπληρωματικό σύνολο U^c. Όμως, η $B_r(\mathbf{x})$ τέμνει, αυτομάτως, και το U, αφού το κέντρο της, το $\mathbf{x}$, ανήκει στο U. Άρα για κάθε $r > 0$ η $B_r(\mathbf{x})$ τέμνει το U και το U^c, οπότε το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του U.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Ένα σύνολο U *περιέχει όλα τα εσωτερικά σημεία του και κάποια (μπορεί όλα, μπορεί κανένα, μπορεί μερικά) από τα συνοριακά σημεία του.*

Τέλος, παρατηρήστε ότι το σύνολο U και το συμπληρωματικό σύνολο U^c έχουν τα ίδια συνοριακά σημεία: ένα σημείο $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του U αν και μόνο αν είναι συνοριακό σημείο του U^c.

Ορισμός 2.3. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*
(i) Το U χαρακτηρίζεται **ανοικτό**, *αν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά σημεία του ή, ισοδύναμα, αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό σημείο του.*
(ii) Το U χαρακτηρίζεται **κλειστό**, *αν, εκτός από τα εσωτερικά σημεία του, περιέχει και όλα τα συνοριακά σημεία του.*

Με άλλα λόγια:

$$\begin{aligned} U \text{ ανοικτό} &\Leftrightarrow \text{ το } U \text{ περιέχει όλα τα εσωτερικά σημεία του και κανένα συνοριακό σημείο του} \\ U \text{ κλειστό} &\Leftrightarrow \text{ το } U \text{ περιέχει όλα τα εσωτερικά σημεία του και όλα τα συνοριακά σημεία του} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1. Τα σημεία τα οποία βρίσκονται μέσα σε έναν δίσκο στο xy-επίπεδο είναι τα εσωτερικά του σημεία, και τα σημεία τα οποία βρίσκονται στην περιφέρεια του δίσκου είναι τα συνοριακά του σημεία. Άρα ένας δίσκος χωρίς κανένα από τα περιφερειακά του σημεία είναι ανοικτός, ενώ ένας δίσκος με όλα τα περιφερειακά του σημεία είναι κλειστός:

$$\text{ανοικτός δίσκος:} \quad \{(x,y) \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r_0^2\}$$

$$\text{κλειστός δίσκος:} \quad \{(x,y) \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r_0^2\}$$

Ένας δίσκος ο οποίος περιέχει κάποια, αλλά όχι όλα, από τα περιφεριακά του σημεία δεν είναι ούτε ανοικτός ούτε κλειστός.

Παράδειγμα 2.2. Τα σημεία τα οποία βρίσκονται μέσα σε μία μπάλα στον xyz-χώρο είναι τα εσωτερικά της σημεία, και τα σημεία τα οποία βρίσκονται στην επιφάνεια της μπάλας είναι τα συνοριακά της σημεία. Άρα μία μπάλα χωρίς κανένα από τα επιφανειακά της σημεία είναι ανοικτή, ενώ μία μπάλα με όλα τα επιφανειακά της σημεία είναι κλειστή:

$$\text{ανοικτή μπάλα:} \quad \{(x,y,z) \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r_0^2\}$$

$$\text{κλειστή μπάλα:} \quad \{(x,y,z) \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq r_0^2\}$$

Μία μπάλα η οποία περιέχει κάποια, αλλά όχι όλα, από τα επιφανειακά της σημεία δεν είναι ούτε ανοικτή ούτε κλειστή.

Παράδειγμα 2.3. Τα σημεία τα οποία βρίσκονται μέσα σε ένα διάστημα στην ευθεία είναι τα εσωτερικά του σημεία, και τα άκρα του διαστήματος είναι τα συνοριακά του σημεία. Άρα ένα διάστημα χωρίς κανένα από τα άκρα του είναι ανοικτό, ενώ ένα διάστημα με τα δύο άκρα του είναι κλειστό:

$$\text{ανοικτό διάστημα:} \quad \{x \,|\, |x-x_0| < r_0\} = (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$$

$$\text{κλειστό διάστημα:} \quad \{x \,|\, |x-x_0| \leq r_0\} = [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$$

Ένα διάστημα το οποίο περιέχει μόνο ένα από τα δύο άκρα του δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.

Πρόταση 2.1. *Έστω συμπληρωματικά σύνολα U και U^c στον $\mathbb{R}^n$. Τότε το ένα είναι ανοικτό αν και μόνο αν το άλλο είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Τα δύο σύνολα έχουν τα ίδια συνοριακά σημεία. Αν αυτά τα κοινά συνοριακά σημεία περιέχονται όλα στο ένα σύνολο, τότε δεν θα περιέχεται κανένα στο άλλο σύνολο. □

2.2 Μερικές παράγωγοι πραγματικής συνάρτησης.

Ορισμός 2.4. *Έστω πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, και έστω $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ένα εσωτερικό σημείο του U. Ορίζουμε την* **μερική παράγωγο** *της f ως προς την j μεταβλητή στο σημείο* **x** *να είναι το όριο (αν υπάρχει)*

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+h,x_{j+1},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\ldots,x_n)}{h}.\end{aligned}$$

Δηλαδή κρατάμε σταθερές όλες τις συντεταγμένες $x_1, \ldots, x_n$ του **x** εκτός από την j-οστή συντεταγμένη και παραγωγίζουμε ως προς αυτήν την συντεταγμένη. Με άλλα λόγια, θεωρούμε την συνάρτηση $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ ως συνάρτηση *μίας* μόνο μεταβλητής, της μεταβλητής x_j, και την παραγωγίζουμε όπως γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό μίας μεταβλητής.

Υπενθύμιση: το **x** είναι εσωτερικό σημείο του U αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $B_r(\mathbf{x}) \subseteq U$.

Παράδειγμα 2.4. Αν $f(x, y) = x^2y + 4xy^2$, τότε

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 4y^2, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 8xy.$$

Αν θέλουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό, γράφουμε

$$\begin{aligned}\tfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} &= \tfrac{((x+h)^2y+4(x+h)y^2)-(x^2y+4xy^2)}{h} = \tfrac{(x^2y+2xhy+h^2y+4xy^2+4hy^2)-(x^2y+4xy^2)}{h} \\ &= \tfrac{2xyh+yh^2+4y^2h}{h} = 2xy + 4y^2 + yh,\end{aligned}$$

και άρα

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}(2xy + 4y^2 + yh) = 2xy + 4y^2.$$

Ομοίως για την άλλη μεταβλητή:

$$\begin{aligned}\tfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} &= \tfrac{(x^2(y+h)+4x(y+h)^2)-(x^2y+4xy^2)}{h} = \tfrac{(x^2y+x^2h+4xy^2+8xyh+4xh^2)-(x^2y+4xy^2)}{h} \\ &= \tfrac{x^2h+8xyh+4xh^2}{h} = x^2 + 8xy + 4xh,\end{aligned}$$

και άρα

$$\tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}(x^2 + 8xy + 4xh) = x^2 + 8xy.$$

Παράδειγμα 2.5. Αν $f(x, y, z) = xye^z + x\sin(x + y^2 + 3xz)$, τότε, χωρίς τον ορισμό,

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= ye^z + \sin(x + y^2 + 3xz) + x(1 + 3z)\cos(x + y^2 + 3xz), \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= xe^z + 2xy\cos(x + y^2 + 3xz), \\ \tfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= xye^z + 3x^2\cos(x + y^2 + 3xz).\end{aligned}$$

2.3 Παραγωγισιμότητα πραγματικής συνάρτησης. Εφαπτόμενο επίπεδο.

Επιστρέφουμε στην περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}$, και ξαναβλέπουμε τις έννοιες της *παραγωγισιμότητας* της f σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του U, και της *εφαπτόμενης ευθείας* στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Θυμόμαστε ότι για να είναι η ευθεία l με καρτεσιανή εξίσωση

$$y = ax + b$$

εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ πρέπει να ισχύουν δύο πράγματα. Πρώτον, η ευθεία l πρέπει να περιέχει το σημείο $(x_0, f(x_0))$, δηλαδή

$$f(x_0) = ax_0 + b. \tag{2.1}$$

Δεύτερον, όταν το $x \in U$ πλησιάζει το x_0 παραμένοντας $\neq x_0$ πρέπει η κλίση της χορδής του γραφήματος η οποία βρίσκεται ακριβώς πάνω από το διάστημα του x-άξονα ανάμεσα στα σημεία x_0, x και η κλίση του ευθ. τμήματος πάνω στην εφαπτόμενη ευθεία το οποίο βρίσκεται ακριβώς πάνω από το ίδιο διάστημα του x-άξονα να προσεγγίζουν η μία την άλλη. Η εν λόγω χορδή του γραφήματος της f συνδέει τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x, f(x))$ και το εν λόγω ευθ. τμήμα της εφαπτόμενης ευθείας συνδέει τα σημεία $(x_0, ax_0 + b)$ και $(x, ax + b)$. Άρα οι αντίστοιχες κλίσεις εκφράζονται από τους λόγους

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \tfrac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0},$$

και άρα πρέπει να ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \tfrac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0}\right| = 0.$$

Λόγω της (2.1) έχουμε την ισοδύναμη σχέση

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{|f(x)-(ax+b)|}{|x-x_0|} = 0. \tag{2.2}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η προσέγγιση των δύο κλίσεων εκφράζεται από το όριο (2.2) το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *ο λόγος της κατακόρυφης απόστασης των σημείων $(x, f(x))$ και $(x, ax + b)$, τα οποία είναι ακριβώς πάνω από το ίδιο σημείο x (το πρώτο στο γράφημα της f και το δεύτερο στην εφαπτόμενη ευθεία), προς την οριζόντια απόσταση των σημείων x και x_0 του x-άξονα πρέπει να τείνει στο 0 όταν το $x \in U$ πλησιάζει το x_0 παραμένοντας $\neq x_0$.*

Τώρα, λύνοντας την σχέση (2.1) ως προς το b και αντικαθιστώντας το b στην σχέση (2.2), βρίσκουμε την ισοδύναμη με την (2.2) σχέση:

$$\lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{x-x_0}\right| = 0. \tag{2.3}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία l πρέπει να ισχύει το όριο (2.3). Από το όριο αυτό καθορίζεται ο συντελεστής a, και, κατόπιν, από την σχέση (2.1) καθορίζεται ο συντελεστής b. Πώς καθορίζεται το a από την (2.3); Η σχέση αυτή, μετά από απλοποίηση, γράφεται ισοδύναμα

$$\lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right| = 0$$

και αυτή γράφεται ισοδύναμα

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a. \tag{2.4}$$

Θυμόμαστε ότι η f χαρακτηρίζεται *παραγωγίσιμη* στο x_0 ακριβώς όταν υπάρχει το τελευταίο όριο και είναι αριθμός, και ότι αυτό το όριο (όταν υπάρχει) ονομάζεται *παράγωγος* της f στο x_0, και συμβολίζεται $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Εμείς, τώρα, θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 όταν ισχύει το όριο (2.3), το οποίο, όπως είδαμε, είναι ισοδύναμο με το (2.4). Με άλλα λόγια:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν υπάρχει αριθμός a ώστε να ισχύει το όριο (2.3).

Συμπέρασμα: υπάρχει ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $y = ax+b$ εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και τότε οι συντελεστές a, b είναι οι

$$\begin{aligned} a &= f'(x_0) \\ b &= f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0, \end{aligned}$$

οπότε η καρτεσιανή εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Έχοντας θυμηθεί την περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής, ερχόμαστε στην περίπτωση πραγματικής συνάρτησης δύο (πραγματικών) μεταβλητών.

Θεωρούμε $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$, και εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του U. Το γράφημα μίας τέτοιας συνάρτησης είναι, συνήθως, μία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, και θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Για να πούμε ότι το επίπεδο l με καρτεσιανή εξίσωση

$$z = ax + by + c$$

είναι εφαπτόμενο στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ πρέπει να ισχύουν δύο πράγματα. Πρώτον, το επίπεδο l πρέπει να περιέχει το σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, δηλαδή

$$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c. \tag{2.5}$$

Δεύτερον, όταν το $(x, y) \in U$ πλησιάζει το (x_0, y_0) παραμένοντας $\neq (x_0, y_0)$ πρέπει η κλίση της χορδής του γραφήματος η οποία βρίσκεται ακριβώς πάνω από το ευθ. τμήμα του xy-επιπέδου ανάμεσα στα σημεία (x_0, y_0) και (x, y) και η κλίση του ευθ. τμήματος πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο το οποίο βρίσκεται ακριβώς πάνω από το ίδιο ευθ. τμήμα του xy-επιπέδου να προσεγγίζουν η μία την άλλη. Η εν λόγω χορδή του γραφήματος της f συνδέει το σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ και το σημείο $(x, y, f(x, y))$, και το εν λόγω ευθ. τμήμα του εφαπτόμενου επιπέδου συνδέει το σημείο $(x_0, y_0, ax_0 + by_0 + c)$ και το σημείο $(x, y, ax + by + c)$. Η προσέγγιση των δύο κλίσεων (όπως στην περίπτωση μίας μεταβλητής) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *ο λόγος της κατακόρυφης απόστασης των σημείων $(x, y, f(x, y))$ και $(x, y, ax + by + c)$, τα οποία είναι ακριβώς πάνω από το ίδιο σημείο (x, y) (το πρώτο στο γράφημα της f και το δεύτερο στο εφαπτόμενο επίπεδο), προς την οριζόντια απόσταση των σημείων (x, y) και (x_0, y_0) του xy-επιπέδου πρέπει να τείνει στο 0 όταν το $(x, y) \in U$ πλησιάζει το (x_0, y_0) παραμένοντας $\neq (x_0, y_0)$*. Άρα η προσέγγιση των δύο κλίσεων ισοδυναμεί με το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y)-(ax+by+c)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0. \tag{2.6}$$

Οι σχέσεις (2.5) και (2.6) είναι ανάλογες των (2.1) και (2.2).

Λύνοντας την (2.5) ως προς το c και αντικαθιστώντας το c στην (2.6), βρίσκουμε την ισοδύναμη με την (2.6) σχέση:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y)-f(x_0,y_0)-(a(x-x_0)+b(y-y_0))|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0. \tag{2.7}$$

Αυτό το όριο είναι το ανάλογο του (2.3). Όπως, λοιπόν, το όριο (2.3) χρησιμεύει για να ορίσουμε την έννοια της παραγωγισιμότητας στην περίπτωση συνάρτησης μίας μεταβλητής, τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το όριο (2.7) για να ορίσουμε την έννοια της παραγωγισιμότητας για συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Ορισμός 2.5. *Εστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$, και εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του U. Λέμε ότι η f είναι* **παραγωγίσιμη** *στο (x_0, y_0), αν υπάρχουν αριθμοί a, b ώστε να ισχύει το όριο (2.7).*

Τώρα θα δούμε ότι, εντελώς ανάλογα με την περίπτωση μίας μεταβλητής, από την (2.7) προσδιορίζονται (αν υπάρχουν) οι συντελεστές a, b, και, κατόπιν, από την (2.5) ο συντελεστής c της καρτεσιανής εξίσωσης του εφαπτόμενου επιπέδου.

Από την (2.7) συνεπάγονται (αλλά όχι αντίστροφα) δύο αναγκαίες σχέσεις, ως εξής. Αν το σημείο (x, y) πλησιάζει το (x_0, y_0) κινούμενο παράλληλα στον x-άξονα, τότε έχουμε $(x, y) = (x, y_0)$ και $x \to x_0$, και από την (2.7) παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)-a(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0$$

ή, ισοδύναμα:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = a. \tag{2.8}$$

Ομοίως, αν το σημείο (x, y) πλησιάζει το (x_0, y_0) κινούμενο παράλληλα στον y-άξονα, τότε έχουμε $(x, y) = (x_0, y)$ και $y \to y_0$, και από την (2.7) παίρνουμε ότι

$$\lim_{y\to y_0} \frac{|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)-b(y-y_0)|}{|y-y_0|} = 0$$

ή, ισοδύναμα:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = b. \tag{2.9}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό των μερικών παραγώγων, οι (2.8), (2.9) σημαίνουν ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b.$$

Άρα:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), τότε συνεπάγεται ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f ως προς x και ως προς y στο σημείο (x_0, y_0), και είναι ίσες με τους αριθμούς a, b οι οποίοι εμφανίζονται στο όριο (2.7).

Τέλος, από την σχέση (2.5) καθορίζεται και το c, και άρα οι συντελεστές της καρτεσιανής εξίσωσης του εφαπτόμενου επιπέδου είναι οι

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ c &= f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0 = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0, \end{aligned}$$

και η καρτεσιανή εξίσωσή του είναι η

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0). \tag{2.10}$$

Πρέπει να επισημάνουμε το εξής σημαντικό. Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων της f στο (x_0, y_0) προέκυψε από την παραγωγισιμότητά της στο σημείο αυτό, δηλαδή από το όριο (2.7), περιορίζοντας το (x, y) να πλησιάζει το (x_0, y_0) πάνω σε δύο μόνο "δρόμους": έναν παράλληλο στον x-άξονα και έναν παράλληλο στον y-άξονα. Όμως, γνωρίζουμε ήδη ότι το όριο (2.7) δεν ισοδυναμεί με το όριο από δύο μόνο "δρόμους". Επομένως, η ύπαρξη των μερικών παραγώγων στο (x_0, y_0) δεν συνεπάγεται το όριο (2.7).

Δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.6. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = xy$.
Θα δούμε αν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 1)$ ή, ισοδύναμα, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 1)$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε αριθμούς a, b ώστε να ισχύει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{|f(x,y)-f(1,1)-(a(x-1)+b(y-1))|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = 0.$$

Γνωρίζουμε ότι, αν αυτό είναι δυνατό, τότε οι υποψήφιοι αριθμοί a, b θα είναι οι μερικές παράγωγοι της f στο σημείο $(1, 1)$. Βρίσκουμε εύκολα τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x,$$

και άρα

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1, \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1.$$

Άρα πρέπει να ελέγξουμε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{|xy-1-((x-1)+(y-1))|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = 0,$$

δηλαδή, μετά από λίγες πράξεις και μία απλή παραγοντοποίηση, το

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{|(x-1)(y-1)|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = 0.$$

Κάνουμε την απλή και προφανή αλλαγή μεταβλητής

$$u = x-1, \quad v = y-1,$$

και το όριο το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{|uv|}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την απλή ανισότητα

$$0 \le \frac{|uv|}{\sqrt{u^2+v^2}} \le \frac{\sqrt{u^2+v^2}\,\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}} = \sqrt{u^2+v^2},$$

βλέπουμε ότι το όριο είναι σωστό, και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,1)$. Η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) + f(1,1) = (x-1)+(y-1)+1 = x+y-1.$$

Παράδειγμα 2.7. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ και θα δούμε πάλι αν υπάρχει το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ ή, ισοδύναμα, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$. Δηλαδή, θα πρέπει να βρούμε αριθμούς a, b ώστε να ισχύει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-(a(x-0)+b(y-0))|}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0.$$

Σκεφτόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα (δηλαδή ότι, αν υπάρχουν οι κατάλληλοι αριθμοί, τότε αυτοί είναι οι μερικές παράγωγοι της f στο σημείο $(0,0)$), και βρίσκουμε τα υποψήφια a, b μέσω των μερικών παραγώγων της f στο σημείο $(0,0)$:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Άρα πρέπει να ελέγξουμε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-(0(x-0)+0(y-0))|}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0,$$

δηλαδή το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Βλέπουμε, όμως, ότι όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο πάνω στην κύρια διαγώνιο με καρτεσιανή εξίσωση $y = x$ έχουμε ότι $(x,y) = (x,x)$ και $x \to 0$, και τότε

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}\,|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Τώρα θα δούμε τον ορισμό της παραγωγισιμότητας για πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, γενικεύοντας, απλώς, τον ορισμό για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Ορισμός 2.6. *Εστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, και εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ του U. Λέμε ότι η f είναι* **παραγωγίσιμη** *στο $\mathbf{x}_0$, αν υπάρχουν αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ ώστε να ισχύει το όριο*

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x_{01},\ldots,x_{0n})} \frac{|f(x_1,\ldots,x_n)-f(x_{01},\ldots,x_{0n})-(a_1(x_1-x_{01})+\cdots+a_n(x_n-x_{0n}))|}{\sqrt{(x_1-x_{01})^2+\cdots+(x_n-x_{0n})^2}} = 0. \tag{2.11}$$

Για παράδειγμα, στην περίπτωση $n = 3$ και με τον συμβολισμό (x_0, y_0, z_0), (x, y, z), η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0, z_0) αν υπάρχουν αριθμοί a, b, c ώστε να ισχύει το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{|f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)-(a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0))|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} = 0 \tag{2.12}$$

το οποίο είναι ανάλογο του (2.7) για την περίπτωση $n = 2$.

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\mathbf{x}_0$, τότε συνεπάγεται ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f ως προς $x_1, \ldots, x_n$ στο σημείο $\mathbf{x}_0$, και είναι ίσες με τους αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$ οι οποίοι εμφανίζονται στο όριο (2.11).

Πράγματι, αν στο όριο (2.11) περιορίσουμε το $(x_1, \ldots, x_n)$ να πλησιάζει το $(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ έτσι ώστε το x_i να πλησιάζει το x_{0i} παραμένοντας $\neq x_{0i}$ και συγχρόνως να είναι $x_j = x_{0j}$ για κάθε $j \neq i$, τότε το όριο (2.11) γράφεται

$$\lim_{x_i\to x_{0i}} \frac{|f(x_{01},\ldots,x_i,\ldots,x_{0n})-f(x_{01},\ldots,x_{0i},\ldots,x_{0n})-a_i(x_i-x_{0i})|}{|x_i-x_{0i}|} = 0$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\lim_{x_i\to x_{0i}} \frac{f(x_{01},\ldots,x_i,\ldots,x_{0n})-f(x_{01},\ldots,x_{0i},\ldots,x_{0n})}{x_i-x_{0i}} = a_i.$$

Βάσει του ορισμού των μερικών παραγώγων, το τελευταίο όριο σημαίνει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = a_i.$$

Στην περίπτωση $n = 2$ χρησιμοποιήσαμε τον όρο *εφαπτόμενο επίπεδο* για τον αφφινικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 με καρτεσιανή εξίσωση (2.10). (Προσέξτε: το γράφημα της f είναι μία επιφάνεια μέσα στον $\mathbb{R}^3$.) Στην γενική περίπτωση το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, οπότε το γράφημά της βρίσκεται μέσα στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο: **εφαπτόμενος αφφινικός υπόχωρος** του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάστασης n στο γράφημα της f στο σημείο του $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$. Η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου αφφινικού υπόχωρου είναι η

$$y = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_{01}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)(x_n - x_{0n}) + f(\mathbf{x}_0), \tag{2.13}$$

η οποία είναι προφανής γενίκευση της καρτεσιανής εξίσωσης (2.10) για την περίπτωση $n = 2$.

Τώρα θα δούμε το *κριτήριο παραγωγισιμότητας* το οποίο σε πολλές περιπτώσεις (όχι, όμως, σε όλες) μας επιτρέπει να αποδείξουμε την παραγωγισιμότητα μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών χωρίς να χρειάζεται να αποδείξουμε τα όρια (2.7) και (2.12) ή το γενικότερο όριο (2.11). Πρώτα θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το κριτήριο παραγωγισιμότητας όταν $n = 2$ και θα ακολουθήσει η διατύπωσή του (χωρίς απόδειξη) στην γενική περίπτωση.

Κριτήριο παραγωγισιμότητας. *Εστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$, και εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του U. Αν η f έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ σε κάθε σημείο (x, y) ενός δίσκου με κέντρο το (x_0, y_0) και θετική ακτίνα, και αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο (x_0, y_0), τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).*
Ειδικότερα, αν οι $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε κάθε σημείο (x, y) ενός ανοικτού συνόλου $V \subseteq U$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του V.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0). \tag{2.14}$$

Θεωρώντας την συνάρτηση $f(x,y)$ ως συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x, από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού έχουμε ότι

$$f(x,y)-f(x_0,y)=\tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0) \tag{2.15}$$

για κάποιο ξ ανάμεσα στα x_0, x. Ομοίως, θεωρώντας την συνάρτηση $f(x_0,y)$ ως συνάρτηση μόνο της μεταβλητής y, έχουμε

$$f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)(y-y_0) \tag{2.16}$$

για κάποιο η ανάμεσα στα y_0, y. Από τις σχέσεις (2.14), (2.15), (2.16) έχουμε ότι

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0)+\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)(y-y_0)$$

και άρα

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0)-\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\big) \\ =\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)-\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\big)(x-x_0)+\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)-\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\big)(y-y_0)\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε, μετά από εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας,

$$\begin{aligned} 0 &\le \tfrac{\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right)\right|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\ &\le \big|\tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)-\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\big|\tfrac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\ &\quad+\big|\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)-\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\big|\tfrac{|y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\ &\le \big|\tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)-\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\big|+\big|\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)-\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\big| \end{aligned} \tag{2.17}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι όταν $(x,y)\to(x_0,y_0)$ τότε $x\to x_0$ και $y\to y_0$, και, επειδή το ξ είναι ανάμεσα στα x_0, x και το η είναι ανάμεσα στα y_0, y, συνεπάγεται $\xi\to x_0$ και $\eta\to y_0$. Επομένως, όταν $(x,y)\to(x_0,y_0)$ συνεπάγεται $(\xi,y)\to(x_0,y_0)$ και $(x_0,\eta)\to(x_0,y_0)$. Τώρα, επειδή υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς στο (x_0,y_0), συμπεραίνουμε ότι

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\to\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)\to\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Τέλος, λόγω της (2.17) και του κριτηρίου παρεμβολής, καταλήγουμε στο ότι

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\tfrac{\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right)\right|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0,$$

και άρα η f είναι, βάσει του ορισμού, παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0).
Τελείωσε η απόδειξη του πρώτου μέρους και τώρα υποθέτουμε ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε κάθε σημείο (x,y) ενός ανοικτού συνόλου V. Παίρνουμε οποιοδήποτε σημείο (x_0,y_0) του V. Επειδή το V είναι ανοικτό, υπάρχει κάποιος δίσκος με κέντρο (x_0,y_0) ο οποίος περιέχεται στο V. Τώρα, σε κάθε σημείο του δίσκου υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f και είναι συνεχείς στο (x_0,y_0). Άρα, σύμφωνα με το πρώτο μέρος, η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0). Όμως, το (x_0,y_0) είναι οποιοδήποτε σημείο του V. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του V. □

Το κριτήριο παραγωγισιμότητας επιτρέπει σε πολλές περιπτώσεις να βλέπουμε εύκολα αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη. Ας ξαναδούμε το παράδειγμα 2.6.

Παράδειγμα 2.8. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = xy$.
Η f έχει σε κάθε σημείο (x,y) του xy-επιπέδου μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x,$$

οι οποίες είναι, προφανώς, συνεχείς σε κάθε σημείο (x,y) του xy-επιπέδου. Όμως το xy-επίπεδο είναι ανοικτό σύνολο, οπότε συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x,y), και όχι μόνο στο $(1,1)$.
Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα της f στο τυχόν σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = (x_0, y_0, x_0y_0)$ είναι η

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0) = y_0(x-x_0) + x_0(y-y_0) + x_0y_0 \\ &= y_0x + x_0y - x_0y_0. \end{aligned}$$

Το γενικό **κριτήριο παραγωγισιμότητας** είναι το εξής.

Κριτήριο παραγωγισιμότητας. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}_0$ του U. Αν η f έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})$ σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ μίας μπάλας με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και θετική ακτίνα, και αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.*
Ειδικότερα, αν οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ ενός ανοικτού συνόλου $V \subseteq U$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του V.

Αποδείξαμε το κριτήριο παραγωγισιμότητας στην ειδική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών. Η απόδειξη στην γενική περίπτωση είναι παρόμοια, αλλά δεν θα την κάνουμε.

Παράδειγμα 2.9. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y,z) = xyz$.
Η f έχει σε κάθε σημείο (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$ μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy,$$

οι οποίες είναι συνεχείς σε κάθε σημείο (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$. Επειδή το $\mathbb{R}^3$ είναι ανοικτό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x,y,z).
Η εξίσωση του εφαπτόμενου αφφινικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 3 στο γράφημα της f στο τυχόν σημείο $(x_0,y_0,z_0, f(x_0,y_0,z_0)) = (x_0,y_0,z_0,x_0y_0z_0)$ είναι η

$$\begin{aligned} w &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \tfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) + f(x_0,y_0,z_0) \\ &= y_0z_0(x-x_0) + x_0z_0(y-y_0) + x_0y_0(z-z_0) + x_0y_0z_0. \end{aligned}$$

Αν θέλουμε να αποδείξουμε την παραγωγισιμότητα της f σε ένα συγκεκριμένο σημείο, π.χ. στο $(1,0,1)$, με τον ορισμό, τότε πρέπει να βρούμε αριθμούς a,b,c ώστε να ισχύει το όριο (2.12), δηλαδή το

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{|xyz - 0 - (a(x-1) + by + c(z-1))|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}} = 0.$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε οι αριθμοί a,b,c είναι ίσοι με τις μερικές παραγώγους της f στο σημείο $(1,0,1)$. Δηλαδή τα υποψήφια a,b,c είναι τα

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1) = 0, \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1) = 1, \quad c = \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = 0.$$

Άρα το όριο το οποίο πρέπει να αποδείξουμε είναι το

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{|xyz - y|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}} = 0.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\frac{|xyz - y|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}} = \frac{|xz-1||y|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}} \leq |xz - 1|.$$

Επειδή, προφανώς,

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} |xz-1| = 0,$$

το όριο το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε είναι σωστό, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,0,1)$.

Ορισμός 2.7. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, και εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}_0$ του U. Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f ως προς $x_1, \dots, x_n$ στο $\mathbf{x}_0$, τότε συμβολίζουμε*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\big),$$
$$Df(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Το $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ ή $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ ονομάζεται **κλίση** *της f στο $\mathbf{x}_0$, και είναι διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Το $Df(\mathbf{x}_0)$ ονομάζεται* **παράγωγος** *της f στο $\mathbf{x}_0$, και είναι $1 \times n$ πίνακας.*

Έτσι η παράσταση

$$a_1(x_1 - x_{01}) + \cdots + a_n(x_n - x_{0n}) = \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_{01}) + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)(x_n - x_{0n}),$$

η οποία εμφανίζεται στο όριο (2.11), γράφεται με δύο τρόπους, ως εξής:
(i) ως εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$:

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_1 - x_{01}, \dots, x_n - x_{0n}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

(ii) ως γινόμενο ενός $1 \times n$ πίνακα με έναν $n \times 1$ πίνακα:

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix} = Df(\mathbf{x}_0) \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix} = Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Στην πρώτη παράσταση το $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ είναι διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, ενώ στην δεύτερη παράσταση το $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ είναι $n \times 1$ πίνακας. Σχετικά με την δεύτερη παράσταση, πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των πινάκων είναι ένας 1×1 πίνακας, και ότι θεωρούμε έναν 1×1 πίνακα ως αριθμό.

Άρα το όριο (2.11) γράφεται με δύο ισοδύναμους τρόπους:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0. \tag{2.18}$$

Στις περιπτώσεις δύο και τριών μεταβλητών η κλίση και η παράγωγος της f γράφονται ως εξής:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\big),$$
$$Df(x_0, y_0) = \big[\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\big],$$

και

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \tfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\big),$$
$$Df(x_0, y_0, z_0) = \big[\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\ \tfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\big].$$

Όταν δεν μας ενδιαφέρει να δηλώσουμε το συγκεκριμένο σημείο $\mathbf{x}_0$ στο οποίο υπολογίζουμε τις παραγώγους ή αν το σημείο είναι το γενικό σημείο $\mathbf{x}$, τότε απλώς γράφουμε

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\big), \quad Df = \big[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}\ \cdots\ \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\big].$$

Επίσης, όταν $n = 2$ ή $n = 3$, γράφουμε

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}\big), \quad Df = \big[\tfrac{\partial f}{\partial x}\ \tfrac{\partial f}{\partial y}\big],$$
$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}\big), \quad Df = \big[\tfrac{\partial f}{\partial x}\ \tfrac{\partial f}{\partial y}\ \tfrac{\partial f}{\partial z}\big].$$

Παράδειγμα 2.10. Για την συνάρτηση $f(x,y) = xy^2 + x^3$ έχουμε

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = (y^2 + 3x^2, 2xy), \quad Df = [y^2 + 3x^2 \;\; 2xy].$$

Παράδειγμα 2.11. Για την συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 y \sin z$ έχουμε

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = (2xy \sin z, x^2 \sin z, x^2 y \cos z), \quad Df = [2xy \sin z \;\; x^2 \sin z \;\; x^2 y \cos z].$$

Παράδειγμα 2.12. Για την συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ είναι

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = (2x_1, \dots, 2x_n), \quad Df = [2x_1 \;\; \cdots \;\; 2x_n].$$

2.4 Παραγωγισιμότητα και παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης.

Στην προηγούμενη ενότητα συζητήσαμε για την έννοιες της παραγωγισιμότητας και της παραγώγου *πραγματικής* συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Τώρα θα ορίσουμε αυτές τις έννοιες για *διανυσματική* συνάρτηση πολλών μεταβλητών.

Ορισμός 2.8. *Εστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$, και εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}_0$ του U. Λέμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι* **παραγωγίσιμη** *στο $\mathbf{x}_0$, αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας A ώστε να ισχύει το όριο*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0. \tag{2.19}$$

Αν υπάρχει τέτοιος πίνακας A, τότε αυτός ο πίνακας ονομάζεται **παράγωγος** *της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$, και συμβολίζεται $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.*

Στο (2.19), για να πολλαπλασιάσουμε τον $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

με το διάνυσμα $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ πρέπει το διάνυσμα αυτό να το γράψουμε ως $n \times 1$ πίνακα, δηλαδή ως πίνακα-στήλη:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix}$$

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι $m \times 1$ πίνακας. Άρα για να μπορούν να γίνουν οι πράξεις στην παράσταση $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ πρέπει τα διανύσματα $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ να τα γράψουμε κι αυτά ως $m \times 1$ πίνακες, δηλαδή ως πίνακες-στήλες:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_{01}, \dots, x_{0n}) \\ \vdots \\ f_m(x_{01}, \dots, x_{0n}) \end{bmatrix}$$

Έτσι, όταν κάνουμε τις πράξεις, η παράσταση $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ θα γίνει

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) - f_1(x_{01}, \dots, x_{0n}) - (a_{11}(x_1 - x_{01}) + \cdots + a_{1n}(x_n - x_{0n})) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) - f_m(x_{01}, \dots, x_{0n}) - (a_{m1}(x_1 - x_{01}) + \cdots + a_{mn}(x_n - x_{0n})) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Το αποτέλεσμα είναι ένας $m \times 1$ πίνακας τον οποίον θεωρούμε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$. Το μήκος αυτού του διανύσματος εμφανίζεται στον αριθμητή του λόγου στο όριο (2.19).

Στην επόμενη ενότητα θα αποδείξουμε ότι, αν η $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\mathbf{x}_0$, τότε οι συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$ της $\mathbf{f}$ είναι όλες παραγωγίσιμες στο $\mathbf{x}_0$ και άρα, σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα, υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των $f_1, \ldots, f_m$ ως προς $x_1, \ldots, x_n$ στο $\mathbf{x}_0$. Επίσης θα δούμε ότι οι συντεταγμένες a_{ij} του πίνακα A είναι ίδιες με τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ των συντεταγμένων συναρτήσεων στο $\mathbf{x}_0$. Δηλαδή

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Επομένως, ο $m \times n$ πίνακας A, τον οποίο ονομάσαμε παράγωγο της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$ και συμβολίσαμε $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, γράφεται τελικά:

$$A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Ο πίνακας $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ έχει στην i-οστή γραμμή του τις μερικές παραγώγους της i-οστής συνάρτησης f_i ως προς τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$, και στην j-οστή στήλη του την μερική παράγωγο ως προς την μεταβλητή x_j των συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_m$.

Τώρα θα δούμε ότι το όριο (2.19) είναι γενίκευση, από το $m = 1$ στο γενικό m, του ορίου (2.18), στην δεύτερη μορφή του. Αν η f είναι πραγματική συνάρτηση (δηλαδή, αν $m = 1$), τότε έχει μόνο μία συντεταγμένη συνάρτηση, τον εαυτό της, οπότε ο πίνακας $Df(\mathbf{x}_0)$ έχει μόνο μία γραμμή, δηλαδή είναι $1 \times n$ πίνακας, αυτός ο οποίος εμφανίζεται στο όριο (2.18). Επίσης, η παράσταση $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ στο όριο (2.18) είναι πραγματικός αριθμός, και γι αυτό το μήκος της είναι απλώς η απόλυτη τιμή της. Στην περίπτωση διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}$ η ανάλογη παράσταση $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ στο όριο (2.19) είναι $m \times 1$ πίνακας, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}^m$, και γι αυτό θεωρούμε το *μήκος* της αντί της απόλυτης τιμής της (η οποία δεν έχει νόημα). Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ο ορισμός της παραγωγισιμότητας διανυσματικής συνάρτησης είναι κατ' ευθείαν γενίκευση του ορισμού της παραγωγισιμότητας πραγματικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 2.13. Θεωρούμε την συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + yz + 1, x^2 + y - z + 4) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)).$$

Θα ελέγξουμε αν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$, δηλαδή αν υπάρχει 2×3 πίνακας A ώστε να ισχύει το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\left\| \mathbf{f}(x,y,z) - \mathbf{f}(0,0,0) - A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

Έχουμε αναφέρει ότι, αν υπάρχει τέτοιος πίνακας A, τότε αυτός σχηματίζεται με συγκεκριμένο τρόπο από τις μερικές παραγώγους των συντεταγμένων συναρτήσεων f_1, f_2 ως προς x, y, z. Οι μερικές παράγωγοι των $f_1(x, y, z) = x + yz + 1$ και $f_2(x, y, z) = x^2 + y - z + 4$ στο σημείο $(0, 0, 0)$ είναι

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0, 0) = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(0, 0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0, 0) = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(0, 0, 0) = -1.$$

Άρα ο υποψήφιος πίνακας A είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Τώρα,

$$\mathbf{f}(x,y,z)-\mathbf{f}(0,0,0)-A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+yz+1\\x^2+y-z+4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}x+yz\\x^2+y-z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}yz\\x^2\end{bmatrix}$$

οπότε

$$\left\|\mathbf{f}(x,y,z)-\mathbf{f}(0,0,0)-A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{y^2z^2+x^4}.$$

Άρα για να είναι η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $(0,0,0)$ πρέπει να ισχύει

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sqrt{y^2z^2+x^4}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την σφαιρική ακτίνα $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, τότε

$$(x,y,z)\to(0,0,0)\quad\Leftrightarrow\quad\rho\to 0+$$

οπότε το όριο γράφεται

$$\lim_{\rho\to 0+}\frac{\sqrt{y^2z^2+x^4}}{\rho}=0.$$

Τώρα έχουμε τις απλές ανισότητες

$$|x|\le\rho,\quad |y|\le\rho,\quad |z|\le\rho$$

και βλέπουμε ότι

$$y^2z^2+x^4\le\rho^2\rho^2+\rho^4=2\rho^4,$$

οπότε

$$0\le\frac{\sqrt{y^2z^2+x^4}}{\rho}\le\frac{\sqrt{2}\,\rho^2}{\rho}=\sqrt{2}\,\rho,$$

και άρα ισχύει το παραπάνω όριο. Επομένως, η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0,0)$.

Παράδειγμα 2.14. Θεωρούμε σταθερή συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ με τύπο

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}_0\quad\text{για κάθε } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,$$

όπου $\mathbf{y}_0=(y_{01},\dots,y_{0m})$.
Κάθε συντεταγμένη συνάρτηση της $\mathbf{f}$ είναι σταθερή:

$$f_i(\mathbf{x})=y_{0i}\quad\text{για κάθε } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n.$$

Άρα οι μερικές παράγωγοι όλων των f_i είναι 0 σε κάθε σημείο $\mathbf{x}_0$, και άρα ο υποψήφιος $m\times n$ πίνακας A στον ορισμό της παραγωγισιμότητας της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$ είναι ο μηδενικός $m\times n$ πίνακας:

$$A=\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0&\dots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\dots&0\end{bmatrix}$$

Ελέγχουμε το όριο:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\|\mathbf{y}_0-\mathbf{y}_0-\mathbf{0}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\|\mathbf{y}_0-\mathbf{y}_0-\mathbf{0}\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\|\mathbf{0}\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$$
$$=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}0=0,$$

και συμπεραίνουμε ότι κάθε σταθερή συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\mathbf{x}_0$, και έχει παράγωγο τον μηδενικό $m\times n$ πίνακα $\mathbf{0}$.

Παράδειγμα 2.15. Θεωρούμε $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

και την αντίστοιχη *γραμμική συνάρτηση* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με τύπο

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

όπου η δεξιά μεριά είναι το γινόμενο του $m \times n$ πίνακα A και του $n \times 1$ πίνακα $\mathbf{x}$ και άρα το $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι $m \times 1$ πίνακας. Τότε

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

οπότε οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$ είναι οι

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Από τους τύπους των συντεταγμένων συναρτήσεων βλέπουμε ότι

$$\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = a_{ij}, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n,$$

σε κάθε σημείο $\mathbf{x}_0$, και άρα ο υποψήφιος πίνακας για να ισχύει το όριο βάσει του οποίου ορίζεται η παραγωγισιμότητα της $\mathbf{f}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι ο ίδιος ο πίνακας A, ο οποίος ορίζει την $\mathbf{f}$. Ελέγχουμε το όριο:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} &= \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \tfrac{\|A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \tfrac{\|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{0}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} 0 = 0 \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων), και συμπεραίνουμε ότι κάθε γραμμική συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσμη σε κάθε σημείο $\mathbf{x}_0$ και έχει παράγωγο τον $m \times n$ πίνακα A ο οποίος την καθορίζει:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = A.$$

Το αντίστοιχο παράδειγμα σε μία διάσταση είναι η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x) = ax$, όπου το a είναι σταθερός αριθμός: γνωρίζουμε πολύ καλά ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 και έχει παράγωγο $f'(x_0) = a$.

2.5 Ιδιότητες παραγώγων.

Αναφέραμε διάφορες ιδιότητες της παραγωγισιμότητας. (Προσέξτε τις διαστάσεις των διαφόρων πινάκων.)

Πρόταση 2.2. *Αν η* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$*, τότε είναι συνεχής στο* $\mathbf{x}_0$.

Απόδειξη. Αφού η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, υπάρχει ο $m \times n$ πίνακας $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ ώστε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Η συνάρτηση $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, αν a_{ij} είναι οι συντεταγμένες του πίνακα A, τότε οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{g}$ είναι οι συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Άρα οι $g_1, \ldots, g_m$ είναι συνεχείς στον $\mathbb{R}^n$, οπότε και η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπάγεται

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} A\mathbf{x} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_0.$$

Τώρα, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| \le \tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0\|.$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Συνεπάγεται

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| = 0$$

και άρα $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. □

Πρόταση 2.3. *Αν οι* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$ *είναι παραγωγίσιμες στο* $\mathbf{x}_0$*, τότε και η* $\mathbf{f} + \mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$*, και*

$$D(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0).$$

Απόδειξη. Έστω $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ και $B = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ οι παράγωγοι των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ στο $\mathbf{x}_0$. Τότε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)-B(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Αν συμβολίσουμε $\mathbf{h}$ την συνάρτηση άθροισμα $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, τότε

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) - (A + B)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) - B(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

οπότε

$$\tfrac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})-\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)-(A+B)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \le \tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} + \tfrac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)-B(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Συνεπάγεται

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})-\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)-(A+B)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0,$$

οπότε η $\mathbf{h}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $D\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = A + B = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. □

Πρόταση 2.4. *Αν η* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$*, και* $\lambda \in \mathbb{R}$*, τότε και η* $\lambda\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$*, και*

$$D(\lambda\mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = \lambda D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Απόδειξη. Έστω $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ η παράγωγος της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$. Τότε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Αν συμβολίσουμε $\mathbf{h}$ την συνάρτηση $\lambda\mathbf{f}$, τότε

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) - (\lambda A)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \lambda(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)),$$

οπότε

$$\frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})-\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)-(\lambda A)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = |\lambda| \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Συνεπάγεται

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})-\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)-(\lambda A)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0,$$

οπότε η $\mathbf{h}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $D\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = \lambda A = \lambda D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. □

Πρόταση 2.5. *Έστω $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$, και έστω $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$ οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$. Τότε η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν οι $f_1, \ldots, f_m$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{x}_0$. Επίσης, αν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των $f_1, \ldots, f_m$ ως προς $x_1, \ldots, x_n$ στο $\mathbf{x}_0$, και η (i, j)-οστή συντεταγμένη του πίνακα $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ είναι ίση με $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ για $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Επομένως, ισχύει ο τύπος (2.21) για τον πίνακα $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.*

Απόδειξη. Στην σχέση (2.20) βλέπουμε ότι οι συντεταγμένες της διανυσματικής παράστασης

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

είναι οι αριθμητικές παραστάσεις

$$y_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_0) - A_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad 1 \leq i \leq m,$$

όπου

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

είναι ο $1 \times n$ πίνακας-γραμμή ο οποίος αποτελείται από τα στοιχεία της i-οστής γραμμής του πίνακα A.

Αν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, τότε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{y}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Επειδή $|y_i(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{y}(\mathbf{x})\|$, συνεπάγεται

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|y_i(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0,$$

οπότε η f_i είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

Αντιστρόφως, έστω ότι οι $f_1, \ldots, f_m$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{x}_0$. Τότε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|y_i(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Όμως ισχύει

$$\|\mathbf{y}(\mathbf{x})\| \leq |y_1(\mathbf{x})| + \cdots + |y_m(\mathbf{x})|,$$

και άρα

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{y}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Επομένως η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσμη στο $\mathbf{x}_0$.

Τέλος, έστω ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσμη στο $\mathbf{x}_0$. Τότε κάθε $f_1, \ldots, f_m$ είναι παραγωγίσμη στο $\mathbf{x}_0$, οπότε γνωρίζουμε ότι τότε όλες οι (πραγματικές συναρτήσεις) $f_1, \ldots, f_m$ έχουν μερικές παραγώγους ως προς $x_1, \ldots, x_n$ στο $\mathbf{x}_0$, και ότι ο πίνακας A_i ο οποίος εμφανίζεται πιο πάνω αποτελείται από τις μερικές παραγώγους της f_i ως προς $x_1, \ldots, x_n$. Δηλαδή, $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ για $1 \leq j \leq n$. Επειδή ο πίνακας A_i είναι η i-οστή γραμμή του πίνακα $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, συμπεραίνουμε ότι η (i, j)-οστή συντεταγμένη του $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ είναι ίση με $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ για $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. □

Κριτήριο παραγωγισιμότητας. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}^m$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}_0$ του U. Αν καθεμία από τις συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$ της $\mathbf{f}$ έχει μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ μιας μπάλας με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και θετική ακτίνα και αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, τότε η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.*
Ειδικώτερα, αν οι μερικές παράγωγοι των $f_1, \ldots, f_m$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ ενός ανοικτού συνόλου $V \subseteq U$, τότε η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του V.

Απόδειξη. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του κριτηρίου παραγωγισιμότητας για πραγματικές συναρτήσεις σε συνδυασμό με την πρόταση 2.5. □

Παράδειγμα 2.16. Η συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2y + yz, e^{x+2y+z^2})$ έχει συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f_1(x, y, z) = x^2y + yz, \quad f_2(x, y, z) = e^{x+2y+z^2}.$$

Οι μερικές παράγωγοι των f_1, f_2 είναι οι

$$\tfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2xy, \quad \tfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x^2 + z, \quad \tfrac{\partial f_1}{\partial z}(x, y) = y,$$

$$\tfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = e^{x+2y+z^2}, \quad \tfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 2e^{x+2y+z^2}, \quad \tfrac{\partial f_2}{\partial z}(x, y) = 2ze^{x+2y+z^2}$$

και είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$. Άρα η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$.

2.6 Ο κανόνας αλυσίδας.

Λήμμα 2.1. *Έστω $m \times n$ πίνακας A. Τότε υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $\|A\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \quad i = 1, \ldots, m,$$

είναι αυτά τα οποία σχηματίζουν τις γραμμές του πίνακα A. Τότε οι συντεταγμένες του $A\mathbf{x}$ είναι τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}$, $i = 1, \ldots, m$. Από την γνωστή ανισότητα του Cauchy συνεπάγεται

$$|\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}| \leq \|\mathbf{a}_i\|\|\mathbf{x}\|, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Επομένως,

$$\|A\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x})^2 + \cdots + (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x})^2} \leq \sqrt{\|\mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{a}_m\|^2}\, \|\mathbf{x}\| = M\|\mathbf{x}\|$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου

$$M = \sqrt{\|\mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{a}_m\|^2} = \big(\textstyle\sum_{i=1}^m \big(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\big)\big)^{1/2} = \big(\textstyle\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}^2\big)^{1/2}.$$

□

Κανόνας αλυσίδας. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$, και $\mathbf{f} : U \to V$, και $\mathbf{g} : V \to \mathbb{R}^k$. Αν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και η $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, τότε και η $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^k$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, και*

$$D\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0). \tag{2.22}$$

Απόδειξη. Έστω $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ και $B = D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$. Τότε

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0, \quad \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} \tfrac{\|\mathbf{g}(\mathbf{y})-\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)-B(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)\|}{\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|} = 0.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $G : V \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(\mathbf{y}) = \begin{cases} \tfrac{\|\mathbf{g}(\mathbf{y})-\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)-B(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)\|}{\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|}, & \mathbf{y} \in V, \mathbf{y} \neq \mathbf{y}_0, \\ 0, & \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Λόγω του δεύτερου ορίου παραπάνω, η G είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. Επίσης, ισχύει

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - B(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)\| = G(\mathbf{y})\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|$$

για κάθε $\mathbf{y} \in V$.
Από την τελευταία σχέση με $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ προκύπτει

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) - B(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\| = (G \circ \mathbf{f})(\mathbf{x})\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) - BA(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq (G \circ \mathbf{f})(\mathbf{x})\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| + \|B(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\| \\ &\leq (G \circ \mathbf{f})(\mathbf{x})\big(\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| + \|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|\big) + \|B(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\|. \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$.
Από το λήμμα 2.1 συνεπάγεται ότι υπάρχουν αριθμοί $M, N \geq 0$ ώστε να ισχύει $\|A\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\|B\mathbf{y}\| \leq N\|\mathbf{y}\|$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Επομένως,

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) - BA(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \\ &\leq (G \circ \mathbf{f})(\mathbf{x})\big(\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| + M\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\big) + N\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|. \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$. Άρα

$$\tfrac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})-\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)-BA(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \leq (G \circ \mathbf{f})(\mathbf{x})\big(\tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} + M\big) + N\tfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.
Επειδή η G είναι συνεχής στο $\mathbf{y}_0$ και η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, συνεπάγεται ότι η $G\circ\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. Επομένως,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (G \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = (G \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = G(\mathbf{y}_0) = 0.$$

Άρα

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \tfrac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})-\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)-BA(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Επομένως, η $\mathbf{h}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $D\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = BA = D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. □

Ο κανόνας της αλυσίδας είναι πολύ σημαντικός και πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή σ' αυτόν.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε την ομοιότητα με τον κανόνα αλυσίδας για πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής:

$$h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0), \quad y_0 = f(x_0).$$

Είναι σαφές ότι η σχέση (2.22) αποτελεί άμεση γενίκευση της προηγούμενης σχέσης.

Πρέπει να κατανοήσουμε τον χαρακτήρα της σχέσης (2.22). Η αριστερή μεριά είναι ένας $k\times n$ πίνακας. Η δεξιά μεριά είναι γινόμενο ενός $k \times m$ πίνακα και ενός $m \times n$ πίνακα, δηλαδή ένας $k \times n$ πίνακας. Άρα η σχέση (2.22) κατ' αρχάς έχει νόημα.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την ισότητα (2.22) θα δούμε ποιά είναι η (l,j)-οστή συντεταγμένη του πίνακα στην αριστερή μεριά και ποιά είναι η (l,j)-οστή συντεταγμένη του πίνακα ο οποίος προκύπτει μετά από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων στην δεξιά μεριά. Η (l,j)-οστή συντεταγμένη του πίνακα στην αριστερή μεριά είναι η μερική παράγωγος της συντεταγμένης συνάρτησης h_l ως προς την μεταβλητή x_j. Δηλαδή

$$\tfrac{\partial h_l}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Η (l,j)-οστή συντεταγμένη του πίνακα ο οποίος προκύπτει μετά από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων στην δεξιά μεριά είναι το εσωτερικό γινόμενο της l-οστής γραμμής του πίνακα $D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$ και της j-οστής στήλης του πίνακα $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Δηλαδή

$$\tfrac{\partial g_l}{\partial y_1}(\mathbf{y}_0)\tfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)+\cdots+\tfrac{\partial g_l}{\partial y_m}(\mathbf{y}_0)\tfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0),\quad \mathbf{y}_0=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Άρα η ισότητα (2.22) ισοδυναμεί με

$$\tfrac{\partial h_l}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=\tfrac{\partial g_l}{\partial y_1}(\mathbf{y}_0)\tfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)+\cdots+\tfrac{\partial g_l}{\partial y_m}(\mathbf{y}_0)\tfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0),\quad 1\leq l\leq k,\ 1\leq j\leq n,\quad \mathbf{y}_0=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \tag{2.23}$$

ή, πιο σύντομα,

$$\tfrac{\partial h_l}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=\textstyle\sum_{i=1}^m\tfrac{\partial g_l}{\partial y_i}(\mathbf{y}_0)\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0),\quad 1\leq l\leq k,\ 1\leq j\leq n,\quad \mathbf{y}_0=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Ίσως βοηθήσει στο να θυμόμαστε καλύτερα την ισότητα (2.23) η κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στις συντεταγμένες συναρτήσεις των $\mathbf{h},\mathbf{g},\mathbf{f}$. Από την $\mathbf{h}=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ έχουμε

$$\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\quad \text{για κάθε } \mathbf{x}\in U. \tag{2.24}$$

Έχουμε

$$\mathbf{h}(\mathbf{x})=\big(h_1(\mathbf{x}),\dots,h_k(\mathbf{x})\big)=\big(h_1(x_1,\dots,x_n),\dots,h_k(x_1,\dots,x_n)\big).$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))&=\big(g_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})),\dots,g_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\big)=\big(g_1(f_1(\mathbf{x}),\dots,f_m(\mathbf{x})),\dots,g_k(f_1(\mathbf{x}),\dots,f_m(\mathbf{x}))\big)\\&=\big(g_1(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)),\dots,g_k(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))\big).\end{aligned}$$

Επομένως, εξισώνοντας τις l-οστές συντεταγμένες των δύο πλευρών της (2.24), έχουμε

$$h_l(x_1,\dots,x_n)=g_l(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)),\quad 1\leq l\leq k.$$

Άρα μπορούμε να πούμε ότι η h_l προκύπτει ως σύνθεση της g_l με την m-άδα των $f_1,\dots,f_m$ σχηματικά ως εξής:

$$h_l(x_1,\dots,x_n)=g_l(y_1,\dots,y_m),\quad y_1=f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_m=f_m(x_1,\dots,x_n). \tag{2.25}$$

Τώρα, στην περίπτωση μίας μεταβλητής, από την σύνθεση

$$h(x)=g(y),\quad y=f(x)$$

προκύπτει η

$$\tfrac{dh}{dx}(x_0)=\tfrac{dg}{dy}(y_0)\tfrac{df}{dx}(x_0),\quad y_0=f(x_0).$$

Προσέξτε ότι η g έχει *μόνο μία* μεταβλητή, την y, στην θέση της οποίας μπαίνει η *μοναδική* συντεταγμένη συνάρτηση f. Στην περίπτωση περισσότερων μεταβλητών, όπως αυτή εμφανίζεται στην (2.25), η g_l έχει $m\geq 2$ μεταβλητές, τις $y_1,\dots,y_m$, στις θέσεις των οποίων μπαίνουν οι m συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1,\dots,f_m$. Έτσι, αντί να προκύψει ένα γινόμενο $\frac{dg}{dy}(y_0)\frac{df}{dx}(x_0)$, προκύπτουν m ανάλογα γινόμενα $\frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\mathbf{y}_0)\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, ένα για κάθε μεταβλητή y_i. Προσθέτουμε αυτά τα γινόμενα και έτσι βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα (2.23) για την παράγωγο της h_l ως προς x_j.

Θα δούμε μερικά παραδείγματα. **Προσοχή**: Πρέπει να θυμόμαστε ότι όταν υπολογίζουμε παράγωγο συνάρτησης f **μίας** μεταβλητής x γράφουμε

$$\tfrac{df}{dx}\quad \text{αντί}\quad \tfrac{\partial f}{\partial x}.$$

Παράδειγμα 2.17. Θεωρούμε τις $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$\mathbf{f}(x) = (x^2, 3x+5, \sin x), \quad g(y,z,w) = yz^2 + w^2 e^z.$$

Τότε η σύνθεση $h = g \circ \mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει τύπο

$$h(x) = g(\mathbf{f}(x)) = g(x^2, 3x+5, \sin x) = x^2(3x+5)^2 + (\sin^2 x)e^{3x+5}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της h είτε από τον τελευταίο τύπο είτε μέσω του κανόνα της αλυσίδας, δηλαδή μέσω των τύπων (2.23). Ας εξασκηθούμε με τον δεύτερο τρόπο. Οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$ είναι οι

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 3x+5, \quad f_3(x) = \sin x.$$

Όταν υπολογίζουμε την σύνθεση, αυτές οι συναρτήσεις μπαίνουν στη θέση των y, z, w αντιστοίχως. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dx}(x) &= \frac{\partial g}{\partial y}(y,z,w)\frac{df_1}{dx}(x) + \frac{\partial g}{\partial z}(y,z,w)\frac{df_2}{dx}(x) + \frac{\partial g}{\partial w}(y,z,w)\frac{df_3}{dx}(x)\\ &= z^2 2x + (2yz + w^2e^z)3 + 2we^z\cos x\\ &= (3x+5)^2 2x + (2x^2(3x+5) + (\sin^2 x)e^{3x+5})3 + 2(\sin x)e^{3x+5}\cos x.\end{aligned}$$

Αν θέλουμε να εργαστούμε με τους πίνακες οι οποίοι εκφράζουν τις παραγώγους (όχι μερικές παραγώγους) των συναρτήσεων, γράφουμε

$$\begin{aligned}\left[\frac{dh}{dx}(x)\right] &= Dh(x) = Dg(y,z,w)D\mathbf{f}(x)\\ &= \begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial y}(y,z,w) & \frac{\partial g}{\partial z}(y,z,w) & \frac{\partial g}{\partial w}(y,z,w)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{df_1}{dx}(x)\\ \frac{df_2}{dx}(x)\\ \frac{df_3}{dx}(x)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}z^2 & 2yz+w^2e^z & 2we^z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x\\ 3\\ \cos x\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2z^2x + 3(2yz+w^2e^z) + 2we^z\cos x\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dx}(x) &= 2z^2x + 3(2yz+w^2e^z) + 2we^z\cos x\\ &= 2(3x+5)^2x + 3(2x^2(3x+5) + (\sin^2 x)e^{3x+5}) + 2(\sin x)e^{3x+5}\cos x.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.18. Θεωρούμε τις $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$\mathbf{f}(x,y) = (x^2y, x+e^y, \sin(xy)), \quad g(z,w,u) = z^2w + wu^2.$$

Τότε η σύνθεση $h = g \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει τύπο

$$h(x,y) = g(\mathbf{f}(x,y)) = g(x^2y, x+e^y, \sin(xy)) = x^4y^2(x+e^y) + (x+e^y)\sin^2(xy).$$

Οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$ είναι οι

$$f_1(x,y) = x^2y, \quad f_2(x,y) = x+e^y, \quad f_3(x,y) = \sin(xy).$$

Όταν υπολογίζουμε την σύνθεση, αυτές οι συναρτήσεις μπαίνουν στη θέση των z, w, u αντιστοίχως. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial z}(z,w,u)\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial w}(z,w,u)\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial u}(z,w,u)\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)\\ &= 2zw2xy + (z^2+u^2) + 2wuy\cos(xy)\\ &= 2(x^2y)(x+e^y)2xy + (x^2y)^2 + \sin^2(xy) + 2(x+e^y)\sin(xy)y\cos(xy)\\ &= 4x^3y^2(x+e^y) + x^4y^2 + \sin^2(xy) + 2y(x+e^y)\sin(xy)\cos(xy)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial z}(z,w,u)\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial w}(z,w,u)\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial u}(z,w,u)\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)\\
&= 2zwx^2 + (z^2+u^2)e^y + 2wux\cos(xy)\\
&= 2(x^2y)(x+e^y)x^2 + (x^2y)^2e^y + \sin^2(xy)e^y + 2(x+e^y)\sin(xy)x\cos(xy)\\
&= 2x^4y(x+e^y) + x^4y^2e^y + \sin^2(xy)e^y + 2x(x+e^y)\sin(xy)\cos(xy)
\end{aligned}
$$

Εργαζόμενοι με πίνακες, γράφουμε

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix} = Dh(x,y) = Dg(z,w,u)D\mathbf{f}(x,y)\\
&= \begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial z}(z,w,u) & \frac{\partial g}{\partial w}(z,w,u) & \frac{\partial g}{\partial u}(z,w,u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2zw & z^2+u^2 & 2wu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2xy & x^2\\ 1 & e^y\\ y\cos(xy) & x\cos(xy)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}4zwxy + z^2+u^2+2wuy\cos(xy) & 2zwx^2+(z^2+u^2)e^y+2wux\cos(xy)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Τώρα εξισώνουμε τις συντεταγμένες του αρχικού και του τελικού πίνακα και βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους της h, αφού αντικαταστήσουμε τα z, w, u με τις $f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)$, αντιστοίχως.

Παράδειγμα 2.19. Θεωρούμε τις $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπους

$$f(x,y,z) = x^2ye^{x+z}, \quad \mathbf{g}(w) = (w^2, \sin w).$$

Τότε η σύνθεση $\mathbf{h} = \mathbf{g}\circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ έχει τύπο

$$\mathbf{h}(x,y,z) = \mathbf{g}(f(x,y,z)) = \mathbf{g}(x^2ye^{x+z}) = (x^4y^2e^{2x+2z}, \sin(x^2ye^{x+z})).$$

Η $\mathbf{g}$ έχει συντεταγμένες συναρτήσεις

$$g_1(w) = w^2, \quad g_2(w) = \sin w$$

και η $\mathbf{h}$ έχει συντεταγμένες συναρτήσεις

$$h_1(x,y,z) = g_1(f(x,y,z)), \quad h_2(x,y,z) = g_2(f(x,y,z)).$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους των h_1, h_2 μέσω των τύπων (2.23), βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{dg_1}{dw}(w)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2w(2+x)xye^{x+z} = 2x^3y^2(2+x)e^{2x+2z}\\
\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{dg_1}{dw}(w)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2wx^2e^{x+z} = 2x^4ye^{2x+2z}\\
\frac{\partial h_1}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{dg_1}{dw}(w)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2wx^2ye^{x+z} = 2x^4y^2e^{2x+2z}\\
\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{dg_2}{dw}(w)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (\cos w)(2+x)xye^{x+z} = \cos(x^2ye^{x+z})(2+x)xye^{x+z}\\
\frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{dg_2}{dw}(w)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (\cos w)x^2e^{x+z} = \cos(x^2ye^{x+z})x^2e^{x+z}\\
\frac{\partial h_2}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{dg_2}{dw}(w)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (\cos w)x^2ye^{x+z} = \cos(x^2ye^{x+z})x^2ye^{x+z}
\end{aligned}
$$

Εργαζόμενοι με πίνακες:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial h_1}{\partial z}(x,y,z)\\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial h_2}{\partial z}(x,y,z)\end{bmatrix} = D\mathbf{h}(x,y,z) = D\mathbf{g}(w)Df(x,y,z)\\
&= \begin{bmatrix}\frac{dg_1}{dw}(w)\\ \frac{dg_2}{dw}(w)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2w\\ \cos w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2xye^{x+z}+x^2ye^{x+z} & x^2e^{x+z} & x^2ye^{x+z}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}4wxye^{x+z}+2wx^2ye^{x+z} & 2wx^2e^{x+z} & 2wx^2ye^{x+z}\\ 2(\cos w)xye^{x+z}+(\cos w)x^2ye^{x+z} & (\cos w)x^2e^{x+z} & (\cos w)x^2ye^{x+z}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Τώρα εξισώνουμε τις συντεταγμένες του αρχικού και του τελικού πίνακα και βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους των h_1, h_2, αφού αντικαταστήσουμε το w με την $f(x, y, z)$.

Παράδειγμα 2.20. Θεωρούμε τις $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπους

$$\mathbf{f}(x, y) = (xy, x^2 + y), \quad \mathbf{g}(u, v) = (u^2, uv, e^{u+2v}).$$

Τότε η σύνθεση $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ έχει τύπο

$$\mathbf{h}(x, y) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(x, y)) = \mathbf{g}(xy, x^2 + y) = (x^2y^2, x^3y + xy^2, e^{xy+2x^2+2y}).$$

Η $\mathbf{f}$ έχει συντεταγμένες συναρτήσεις

$$f_1(x, y) = xy, \quad f_2(x, y) = x^2 + y,$$

η $\mathbf{g}$ έχει συντεταγμένες συναρτήσεις

$$g_1(u, v) = u^2, \quad g_2(u, v) = uv, \quad g_3(u, v) = e^{u+2v}$$

και η $\mathbf{h}$ έχει συντεταγμένες συναρτήσεις

$$\begin{aligned}
h_1(x, y) &= g_1(\mathbf{f}(x, y)) = g_1(f_1(x, y), f_2(x, y)),\\
h_2(x, y) &= g_2(\mathbf{f}(x, y)) = g_2(f_1(x, y), f_2(x, y)),\\
h_3(x, y) &= g_3(\mathbf{f}(x, y)) = g_3(f_1(x, y), f_2(x, y)).
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους των h_1, h_2, h_3 μέσω των τύπων (2.23), και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) &= \tfrac{\partial g_1}{\partial u}(u, v)\tfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \tfrac{\partial g_1}{\partial v}(u, v)\tfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2uy\\
\tfrac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) &= \tfrac{\partial g_1}{\partial u}(u, v)\tfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \tfrac{\partial g_1}{\partial v}(u, v)\tfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 2ux\\
\tfrac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) &= \tfrac{\partial g_2}{\partial u}(u, v)\tfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \tfrac{\partial g_2}{\partial v}(u, v)\tfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = vy + 2ux\\
\tfrac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) &= \tfrac{\partial g_2}{\partial u}(u, v)\tfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \tfrac{\partial g_2}{\partial v}(u, v)\tfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = vx + u\\
\tfrac{\partial h_3}{\partial x}(x, y) &= \tfrac{\partial g_3}{\partial u}(u, v)\tfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \tfrac{\partial g_3}{\partial v}(u, v)\tfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = e^{u+2v}y + 4e^{u+2v}x\\
\tfrac{\partial h_3}{\partial y}(x, y) &= \tfrac{\partial g_3}{\partial u}(u, v)\tfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \tfrac{\partial g_3}{\partial v}(u, v)\tfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = e^{u+2v}x + 2e^{u+2v}
\end{aligned}$$

Τελειώνουμε αντικαθιστώντας τα u, v με τις $f_1(x, y), f_2(x, y)$, αντιστοίχως.
Εργαζόμενοι με πίνακες:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y)\\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y)\\ \frac{\partial h_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_3}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} &= D\mathbf{h}(x, y) = D\mathbf{g}(u, v)D\mathbf{f}(x, y)\\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v)\\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v)\\ \frac{\partial g_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_3}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 2u & 0\\ v & u\\ e^{u+2v} & 2e^{u+2v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x\\ 2x & 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 2uy & 2ux\\ vy + 2ux & vx + u\\ e^{u+2v}y + 4e^{u+2v}x & e^{u+2v}x + 2e^{u+2v} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Τώρα εξισώνουμε τις συντεταγμένες του αρχικού και του τελικού πίνακα και βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους των h_1, h_2, h_3, αφού αντικαταστήσουμε τα u, v με τις $f_1(x, y), f_2(x, y)$, αντιστοίχως.

Μετά από όλα αυτά τα παραδείγματα, μπορούμε να πούμε ότι, αν σκοπεύουμε να υπολογίσουμε όλες τις μερικές παραγώγους όλων των συντεταγμένων συναρτήσεων της σύνθετης συνάρτησης, τότε μάλλον βολεύει να εργαστούμε με τους πίνακες χρησιμοποιώντας την σχέση (2.22), ενώ, αν θέλουμε να βρούμε κάποιες λίγες από τις μερικές παραγώγους κάποιων λίγων από τις συντεταγμένες συναρτήσεις της σύνθετης συνάρτησης, τότε βολεύει να βρούμε μόνο αυτές χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.23).

Πολλές φορές χρειάζεται να βρούμε τις μερικές παραγώγους σύνθετης συνάρτησης όπου δεν είναι κωδικοποιημένες εξ' αρχής όλες οι παράμετροι όπως έχουμε δει μέχρι τώρα στα παραδείγματά μας ή στην θεωρία.

Παράδειγμα 2.21. Θέλουμε να βρούμε, μέσω του κανόνα της αλυσίδας, τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης h με τύπο

$$h(x,y,z) = f(u(x), v(x,y), w(x,y,z)),$$

συναρτήσει των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων οι οποίες εμπλέκονται στον ορισμό της. Η συνάρτηση h εμφανίζεται ως συνάρτηση των τριών μεταβλητών x, y, z, δηλαδή ως συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^3$ (το οποίο δεν προσδιορίζεται). Επιπλέον, η h εμφανίζεται ως σύνθεση δύο συναρτήσεων. Η δεύτερη, η "εξωτερική", είναι η συνάρτηση

$$f(u,v,w),$$

δηλαδή συνάρτηση τριών μεταβλητών και άρα ορισμένη σε κάποιο υποσύνολο V του $\mathbb{R}^3$ (το οποίο, επίσης, δεν προσδιορίζεται). Την πρώτη συνάρτηση, την "εσωτερική", δηλαδή αυτήν η οποία αντικαθιστά τις μεταβλητές της f, μπορούμε να την συμβολίσουμε με ένα γράμμα της επιλογής μας, π.χ. $\mathbf{k}(x,y,z)$, και έχει τύπο

$$\mathbf{k}(x,y,z) = (u(x), v(x,y), w(x,y,z)).$$

Η $\mathbf{k}$ πρέπει να έχει πεδίο ορισμού το U και το σύνολο τιμών της πρέπει να είναι υποσύνολο του V. Οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{k}$ είναι οι συναρτήσεις με τύπους

$$k_1(x,y,z) = u(x), \quad k_2(x,y,z) = v(x,y), \quad k_3(x,y,z) = w(x,y,z).$$

Είναι φανερό ότι αυτές οι τρεις συναρτήσεις τοποθετούνται στις θέσεις των u, v, w στην $f(u,v,w)$ ώστε να προκύψει ως σύνθεση η $h(x,y,z)$.
Προσέξτε ότι η $k_1(x,y,z) = u(x)$ δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές y, z, οπότε οι μερικές της παράγωγοι ως προς y, z είναι ίσες με 0. Επίσης, η $k_2(x,y,z) = v(x,y)$ δεν εξαρτάται από την z, οπότε η μερική της παράγωγος ως προς z είναι ίση με 0.
Επομένως,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) &= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\tfrac{\partial k_1}{\partial x}(x,y,z) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial k_2}{\partial x}(x,y,z) + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial k_3}{\partial x}(x,y,z)\\
&= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\tfrac{du}{dx}(x) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial x}(x,y,z),\\
\tfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) &= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\tfrac{\partial k_1}{\partial y}(x,y,z) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial k_2}{\partial y}(x,y,z) + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial k_3}{\partial y}(x,y,z)\\
&= \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial y}(x,y,z),\\
\tfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) &= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\tfrac{\partial k_1}{\partial z}(x,y,z) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial k_2}{\partial z}(x,y,z) + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial k_3}{\partial z}(x,y,z)\\
&= \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial z}(x,y,z).
\end{aligned}$$

Εννοείται ότι στους τελικούς τύπους πρέπει να αντικαταστήσουμε τα u, v, w στις μερικές παραγώγους της f με τα $u(x), v(x,y), w(x,y,z)$, ώστε να εμφανίζονται μόνο οι μεταβλητές x, y, z.
Μπορούμε να εργαστούμε *χωρίς να είμαστε τόσο τυπικοί*: δεν χρειάζεται να "δημιουργήσουμε" την συνάρτηση $\mathbf{k}(x,y,z)$ με τις συντεταγμένες συναρτήσεις της, $k_1(x,y,z), k_2(x,y,z), k_3(x,y,z)$, οι

οποίες είναι οι εξ' αρχής εμφανιζόμενες $u(x), v(x,y), w(x,y,z)$. Μπορούμε απλώς να σκεφτούμε ότι, για να προκύψει η $h(x,y,z)$, στις θέσεις των u, v, w στην $f(u,v,w)$ μπαίνουν οι συναρτήσεις $u(x), v(x,y), w(x,y,z)$ και να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2.23):

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) &= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\tfrac{du}{dx}(x) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial x}(x,y,z),\\
\tfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) &= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\,0 + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial y}(x,y,z)\\
&= \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial y}(x,y,z),\\
\tfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) &= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\,0 + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\,0 + \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial z}(x,y,z)\\
&= \tfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial z}(x,y,z).
\end{aligned}$$

Και πάλι, στους τελικούς τύπους πρέπει να αντικαταστήσουμε τα u, v, w στις μερικές παραγώγους της f με τα $u(x), v(x,y), w(x,y,z)$.

Παράδειγμα 2.22. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, θέλουμε να βρούμε, μέσω του κανόνα της αλυσίδας, τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης h με τύπο

$$h(x,y,z) = g(x^2y, x+yz, w(x,z)).$$

Δεν θα είμαστε τυπικοί. Το μόνο "επιπλέον" είναι ότι θα δημιουργήσουμε σύμβολα για τις μεταβλητές της συνάρτησης g στις θέσεις των οποίων μπαίνουν οι συναρτήσεις x^2y, $x+yz$, $w(x,z)$: έστω ότι επιλέγουμε u, v, w, αντιστοίχως. Τότε,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) &= \tfrac{\partial g}{\partial u}(u,v,w)\tfrac{\partial(x^2y)}{\partial x} + \tfrac{\partial g}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial(x+yz)}{\partial x} + \tfrac{\partial g}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial x}(x,z)\\
&= 2xy\tfrac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) + \tfrac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) + \tfrac{\partial g}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial x}(x,z),\\
\tfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) &= \tfrac{\partial g}{\partial u}(u,v,w)\tfrac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \tfrac{\partial g}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial(x+yz)}{\partial y} + \tfrac{\partial g}{\partial w}(u,v,w)\,0\\
&= x^2\tfrac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) + z\tfrac{\partial g}{\partial v}(u,v,w),\\
\tfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) &= \tfrac{\partial g}{\partial u}(u,v,w)\tfrac{\partial(x^2y)}{\partial z} + \tfrac{\partial g}{\partial v}(u,v,w)\tfrac{\partial(x+yz)}{\partial z} + \tfrac{\partial g}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial z}(x,z)\\
&= y\tfrac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) + \tfrac{\partial g}{\partial w}(u,v,w)\tfrac{\partial w}{\partial z}(x,z).
\end{aligned}$$

Όπως πάντα, στους τελικούς τύπους πρέπει να αντικαταστήσουμε τα u, v, w στις μερικές παραγώγους της g με τα x^2y, $x+yz$, $w(x,z)$, αντιστοίχως.

2.7 Καμπύλες.

Ορισμός 2.9. *Έστω διάστημα (όχι μονοσύνολο) $I \subseteq \mathbb{R}$, και συνάρτηση*

$$\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n,$$

η οποία είναι συνεχής στο I. Η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma}$ ονομάζεται **καμπύλη** *στον $\mathbb{R}^n$.*

Η μόνη προϋπόθεση για να λέμε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$ είναι καμπύλη είναι η συνέχειά της στο διάστημα I. Προσέξτε: *το I πρέπει να είναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων.* Κατά τα άλλα, το I μπορεί να είναι διάστημα οποιουδήποτε τύπου: ανοικτό, κλειστό, ημιανοικτό, φραγμένο, μη-φραγμένο.

Αν $I = [a,b]$, τότε τα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(a)$, $\boldsymbol{\sigma}(b)$ ονομάζονται **άκρα** της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$. Αν $I = (a,b)$, τότε λέμε ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ δεν έχει άκρα. Αν το I περιέχει μόνο το ένα άκρο του, το a ή το b, τότε λέμε ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ έχει μόνο ένα άκρο, το $\boldsymbol{\sigma}(a)$ ή το $\boldsymbol{\sigma}(b)$. Αν η καμπύλη έχει και τα δύο άκρα της και αυτά ταυτίζονται, δηλαδή αν $\boldsymbol{\sigma}(a) = \boldsymbol{\sigma}(b)$, τότε λέμε ότι η καμπύλη είναι **κλειστή**.

Συνήθως η ανεξάρτητη μεταβλητή της καμπύλης στο διάστημα I συμβολίζεται t. Έτσι θέλουμε να δηλώσουμε ότι όταν ο *χρόνος* t διατρέχει ένα *χρονικό* διάστημα I τότε το αντίστοιχο σημείο

$\boldsymbol{\sigma}(t)$ *κινείται* στον χώρο $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο των θέσεων του κινητού σημείου $\boldsymbol{\sigma}(t)$, δηλαδή το σύνολο τιμών $\boldsymbol{\sigma}(I) = \{\boldsymbol{\sigma}(t) \mid t \in I\}$ της συνάρτησης $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η λεγόμενη **τροχιά** της καμπύλης.

Καθώς η παράμετρος (χρόνος) t *αυξάνεται* στο διάστημα I το μεταβλητό σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ κινείται πάνω στην τροχιά της καμπύλης σε μία συγκεκριμένη κατεύθυνση η οποία ονομάζεται **φορά** ή **κατεύθυνση** της καμπύλης ή και **φορά διαγραφής** της τροχιάς της καμπύλης.

Συνηθίζουμε να γράφουμε

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in I$$

όταν θέλουμε να δείξουμε τις συντεταγμένες συναρτήσεις της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$. Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$ συνήθως γράφουμε

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t)), \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Τα επόμενα τρία παραδείγματα, ευθεία, κύκλος και έλλειψη, είναι γνωστά από την στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία.

Παράδειγμα 2.23. Αν $\mathbf{x}_0$ είναι κάποιο σημείο στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v}$ είναι κάποιο μη-μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

έχει ως τροχιά ολόκληρη την ευθεία η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{v}$ και διέρχεται από το σημείο $\mathbf{x}_0$. Η φορά διαγραφής της ευθύγραμμης τροχιάς ταυτίζεται με την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$. Πράγματι, αν t_1, t_2 είναι δύο χρονικές στιγμές έτσι ώστε $t_1 < t_2$, τότε το διάνυσμα από το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_1)$ στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_2)$ είναι *θετικό* πολλαπλάσιο του διανύσματος $\mathbf{v}$:

$$\boldsymbol{\sigma}(t_2) - \boldsymbol{\sigma}(t_1) = (t_2\mathbf{v} + \mathbf{x}_0) - (t_1\mathbf{v} + \mathbf{x}_0) = (t_2 - t_1)\mathbf{v}.$$

Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{\sigma}$ σε ένα υποδιάστημα (όχι μονοσύνολο) I του $\mathbb{R}$, τότε η τροχιά της καμπύλης θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας. Π.χ. αν $I = [a, b]$, τότε η τροχιά θα είναι το ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^n$ με άκρα τα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(a) = a\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$ και $\boldsymbol{\sigma}(b) = b\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$. Από την άλλη μεριά, αν μας δώσουν ένα οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^n$ με συγκεκριμένα άκρα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}_1$, τότε μπορούμε να βρούμε μία καμπύλη η τροχιά της οποίας είναι το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα:

$$\boldsymbol{\sigma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 = t\mathbf{x}_1 + (1 - t)\mathbf{x}_0.$$

Η φορά διαγραφής του ευθυγράμμου τμήματος είναι από το άκρο $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{x}_0$ στο άκρο $\boldsymbol{\sigma}(1) = \mathbf{x}_1$.

Παράδειγμα 2.24. Έστω σημείο (x_0, y_0) του $\mathbb{R}^2$ και $r > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι οι

$$x(t) = r\cos t + x_0, \;\; y(t) = r\sin t + y_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

και ικανοποιούν την ισότητα

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή τα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ βρίσκονται πάνω στον κύκλο με καρτεσιανή εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, δηλαδή στον κύκλο με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r. Μάλιστα, είναι γνωστό ότι όταν το t διατρέχει το $\mathbb{R}$ το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ διατρέχει άπειρες φορές τον κύκλο. Δηλαδή, η τροχιά της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ο κύκλος με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r. Η φορά διαγραφής του κύκλου γύρω από το κέντρο του ταυτίζεται με την αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Αυτή η φορά περιστροφής ονομάζεται **θετική φορά περιστροφής**. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{\sigma}$ σε ένα κλειστό διάστημα I μήκους 2π, π.χ. το $I = [0, 2\pi]$ ή το $[-\pi, \pi]$, τότε όταν το t διατρέχει το I το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ διατρέχει ακριβώς μία φορά τον κύκλο, πάλι με την θετική φορά περιστροφής. Σ' αυτήν την περίπτωση η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι κλειστή καμπύλη. Πράγματι, αν $I = [a, a + 2\pi]$, τότε

$$\boldsymbol{\sigma}(a + 2\pi) = (r\cos(a + 2\pi) + x_0, r\sin(a + 2\pi) + y_0) = (r\cos a + x_0, r\sin a + y_0) = \boldsymbol{\sigma}(a).$$

Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{\sigma}$ σε ένα διάστημα I μήκους $< 2\pi$, τότε η τροχιά της καμπύλης θα είναι ένα τόξο του κύκλου.

Παράδειγμα 2.25. Παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος. Έστω σημείο (x_0, y_0) του $\mathbb{R}^2$ και $a, b > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (a\cos t + x_0, b\sin t + y_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι οι

$$x(t) = a\cos t + x_0,\ \ y(t) = b\sin t + y_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

και ικανοποιούν την ισότητα

$$\big(\tfrac{x(t)-x_0}{a}\big)^2 + \big(\tfrac{y(t)-y_0}{b}\big)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή τα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ βρίσκονται πάνω στην έλλειψη με καρτεσιανή εξίσωση $(\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$, δηλαδή στην έλλειψη με κέντρο (x_0, y_0) και ημιάξονες a, b. Όταν το t διατρέχει το $\mathbb{R}$ το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ διατρέχει άπειρες φορές την έλλειψη. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{\sigma}$ σε ένα κλειστό διάστημα I μήκους 2π, π.χ. το $I = [0, 2\pi]$ ή το $[-\pi, \pi]$, τότε όταν το t διατρέχει το I το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ διατρέχει αριβώς μία φορά την έλλειψη, και η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι κλειστή καμπύλη. Και στις δύο περιπτώσεις, λοιπόν, η τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η έλλειψη με κέντρο (x_0, y_0) και ημιάξονες a, b. Η φορά διαγραφής της έλλειψης γύρω από το κέντρο της είναι η θετική φορά περιστροφής.

Παράδειγμα 2.26. Θεωρούμε πραγματική συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I είναι διάστημα (όχι μονοσύνολο) του $\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο I, θα δούμε ότι το γράφημά της,

$$G_f = \{(t, f(t))\,|\,t \in I\}$$

είναι τροχιά καμπύλης στον $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, f(t)), \quad t \in I.$$

Η $\boldsymbol{\sigma}$ έχει συντεταγμένες συναρτήσεις με τύπους

$$x(t) = t,\ \ y(t) = f(t), \quad t \in I$$

οι οποίες είναι συνεχείς στο διάστημα I. Άρα η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$. Προφανώς, η τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$, δηλαδή το σύνολο τιμών της $\boldsymbol{\sigma}$, είναι το

$$\boldsymbol{\sigma}(I) = \{\boldsymbol{\sigma}(t)\,|\,t \in I\} = \{(t, f(t))\,|\,t \in I\} = G_f,$$

δηλαδή το γράφημα της f.

Παράδειγμα 2.27. Αν $r > 0$ και το λ είναι αριθμός $\neq 0$, η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0, \lambda t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$. Η τροχιά της έχει ελικοειδές σχήμα και βρίσκεται πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια K η οποία είναι κατακόρυφη και τέμνει το xy-επίπεδο στον κύκλο κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r. Όταν το t αυξάνεται στο $[0, 2\pi]$ το $\boldsymbol{\sigma}(t)$ περιστρέφεται πάνω στην επιφάνεια K: αν $\lambda > 0$, το $\boldsymbol{\sigma}(t)$ περιστρέφεται και συγχρόνως ανεβαίνει ενώ, αν $\lambda < 0$, το $\boldsymbol{\sigma}(t)$ περιστρέφεται και συγχρόνως κατεβαίνει. Τα δύο άκρα της τροχιάς βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφη ευθεία και έχουν διαφορά ύψους ίση με $2\pi\lambda$.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ένα σημείο το οποίο ενδέχεται να προκαλεί σύγχυση. Διακρίναμε ανάμεσα στην έννοια της καμπύλης (η οποία είναι μία συνάρτηση) και στην έννοια της τροχιάς της καμπύλης (το σύνολο τιμών της). Π.χ. στο δεύτερο παράδειγμα η καμπύλη είναι η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma}$ με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0)$ ενώ η τροχιά της είναι ο κύκλος με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r, δηλαδή ένα σχήμα στο xy-επίπεδο. Όμως, έχουμε συνηθίσει παραδοσιακά να χαρακτηρίζουμε *καμπύλη* και τον κύκλο, δηλαδή το συγκεκριμένο σχήμα στο xy-επίπεδο. Το ίδιο γίνεται και στο πρώτο παράδειγμα. Χαρακτηρίζουμε καμπύλη την συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma}$ με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$ και τροχιά της την ευθεία η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{v}$ και διέρχεται από το σημείο $\mathbf{x}_0$, αλλά παραδοσιακά χαρακτηρίζουμε *καμπύλη* και την ίδια την ευθεία. Λόγω συνήθειας, η διπλή χρήση της λέξης "καμπύλη" είναι αναπόφευκτη και θα πρέπει κάθε φορά να ξεχωρίζουμε από τα συμφραζόμενα αν αναφερόμαστε σε καμπύλη-συνάρτηση ή σε καμπύλη-τροχιά.

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει στις προηγούμενες ενότητες, η καμπύλη

$$\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$$

είναι παραγωγίσιμη ως διανυσματική συνάρτηση σε κάποιο εσωτερικό σημείο t_0 του διαστήματος I αν και μόνο αν καθεμία από τις συντεταγμένες συναρτήσεις $x_1, \ldots, x_n$ της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0. Η παράγωγος της $\boldsymbol{\sigma}$ στο t_0 είναι ο $n \times 1$ πίνακας

$$D\boldsymbol{\sigma}(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{bmatrix}$$

Τώρα κάνουμε τον εξής υπολογισμό:

$$\begin{aligned} \tfrac{\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{t-t_0} &= \tfrac{(x_1(t),\ldots,x_n(t))-(x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0))}{t-t_0} = \tfrac{(x_1(t)-x_1(t_0),\ldots,x_n(t)-x_n(t_0))}{t-t_0} \\ &= \big(\tfrac{x_1(t)-x_1(t_0)}{t-t_0}, \ldots, \tfrac{x_n(t)-x_n(t_0)}{t-t_0}\big). \end{aligned}$$

Άρα, όταν $t \to t_0$, το όριο του $\frac{\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{t-t_0}$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια όλων των $\frac{x_j(t)-x_j(t_0)}{t-t_0}$, δηλαδή όλες οι παράγωγοι $x_j'(t_0)$, και τότε έχουμε

$$\lim_{t\to t_0} \tfrac{\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{t-t_0} = \big(\lim_{t\to t_0} \tfrac{x_1(t)-x_1(t_0)}{t-t_0}, \ldots, \lim_{t\to t_0} \tfrac{x_n(t)-x_n(t_0)}{t-t_0}\big) = (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)).$$

Ορισμός 2.10. *Έστω καμπύλη $\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$ και t_0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος I. Το όριο $\lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{t-t_0}$, αν υπάρχει, ονομάζεται κι αυτό* **παράγωγος** *της $\boldsymbol{\sigma}$ στο t_0 και συμβολίζεται $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$. Δηλαδή,*

$$\boldsymbol{\sigma}'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \tfrac{\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{t-t_0} = (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)),$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$.

Άρα η παράγωγος της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$ στο t_0 είναι είτε ο $n \times 1$ πίνακας $D\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ είτε το n-διάστατο διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$. Και στις δύο περιπτώσεις οι συντεταγμένες της παραγώγου είναι οι παράγωγοι των συντεταγμένων συναρτήσεων.

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ ονομάζεται και **(διανυσματική) ταχύτητα** της καμπύλης, διότι εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της θέσης του κινητού $\boldsymbol{\sigma}(t)$ ως προς τον χρόνο t την χρονική στιγμή t_0. Το μήκος

$$\|\boldsymbol{\sigma}'(t_0)\| = \sqrt{(x_1'(t_0))^2 + \cdots + (x_n'(t_0))^2}$$

της ταχύτητας ονομάζεται **αριθμητική** ή **βαθμωτή ταχύτητα**.

Τώρα, εκτός από το εσωτερικό σημείο t_0 του διαστήματος I θεωρούμε ένα σημείο $t_0 + h \in I$ πολύ κοντά στο t_0 (δηλαδή το h είναι πολύ κοντά στο 0), και την ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ και $\boldsymbol{\sigma}(t_0 + h)$ της τροχιάς της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$. Το διάνυσμα $\frac{\boldsymbol{\sigma}(t_0+h)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{h}$ είναι παράλληλο με την ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ και $\boldsymbol{\sigma}(t_0+h)$, οπότε αυτή η ευθεία περιγράφεται με την παραμετρική εξίσωση

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}(t_0+h)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{h}\, t + \boldsymbol{\sigma}(t_0), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.26}$$

Όταν $h \to 0$ τότε το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0 + h)$ κινείται προς το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$, και άρα η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ και $\boldsymbol{\sigma}(t_0 + h)$ κινείται προς την ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ και εφάπτεται στην τροχιά της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$. Έτσι, παίρνοντας όριο στην παραμετρική εξίσωση (2.26) όταν $h \to 0$, βρίσκουμε την παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ στο σημείο της $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$:

$$\boldsymbol{\sigma}'(t_0)t + \boldsymbol{\sigma}(t_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αυτό ισχύει με την προϋπόθεση ότι η παράγωγος $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ είναι μη-μηδενικό διάνυσμα: $\boldsymbol{\sigma}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Αν $\boldsymbol{\sigma}'(t_0) = \mathbf{0}$, η παραπάνω παραμετρική εξίσωση δεν είναι παραμετρική εξίσωση ευθείας (είναι παραμετρική εξίσωση σημείου).

Επομένως, η παράγωγος (ή ταχύτητα) $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ είναι διάνυσμα παράλληλο στην εφαπτόμενη ευθεία στην τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ στο σημείο της $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$. Μάλιστα, αν θεωρήσουμε την παράγωγο $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ ως διάνυσμα με αρχή το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ της τροχιάς, τότε αυτή είναι εφαπτόμενη στην τροχιά στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η κατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ συμπίπτει με την κατεύθυνση διαγραφής της τροχιάς κοντά στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$.

Παράδειγμα 2.28. Έστω $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ η καμπύλη με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

η οποία έχει ως τροχιά την ευθεία η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ και διέρχεται από το σημείο $\mathbf{x}_0$. Τότε για κάθε $t_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\boldsymbol{\sigma}'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{(t\mathbf{v}+\mathbf{x}_0)-(t_0\mathbf{v}+\mathbf{x}_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{(t-t_0)\mathbf{v}}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Παράδειγμα 2.29. Αν (x_0, y_0) είναι σημείο του $\mathbb{R}^2$ και $r > 0$, θεωρούμε και πάλι την καμπύλη $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

η οποία έχει ως τροχιά τον κύκλο με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r. Τότε για κάθε $t_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\boldsymbol{\sigma}'(t_0) = \big(\tfrac{d(r\cos t+x_0)}{dt}(t_0), \tfrac{d(r\sin t+y_0)}{dt}(t_0)\big) = (-r\sin t_0, r\cos t_0).$$

Το "ακτινικό" διάνυσμα από το κέντρο (x_0, y_0) έως το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = (r\cos t_0 + x_0, r\sin t_0 + y_0)$ του κύκλου είναι το

$$\boldsymbol{\sigma}(t_0) - (x_0, y_0) = (r\cos t_0, r\sin t_0).$$

Ο υπολογισμός του εσωτερικού γινομένου

$$(\boldsymbol{\sigma}(t_0) - (x_0, y_0)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t_0) = (r \cos t_0)(-r \sin t_0) + (r \sin t_0)(r \cos t_0) = 0$$

επιβεβαιώνει το ότι η παράγωγος (ή ταχύτητα) $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ είναι κάθετη στο "ακτινικό" διάνυσμα και άρα, αν θεωρήσουμε ότι έχει ως αρχή το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$, είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο του $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$.

Αν $\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$ είναι μία καμπύλη, και αν σε κάποιο εσωτερικό σημείο t_0 του διαστήματος I υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $\boldsymbol{\sigma}'_+(t_0)$ και $\boldsymbol{\sigma}'_-(t_0)$ στο t_0 αλλά δεν έχουν (ως διανύσματα) την ίδια κατεύθυνση, τότε η τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ σχηματίζει γωνία στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$. Το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}'_+(t_0)$ είναι εφαπτόμενο στο τμήμα της τροχιάς το οποίο ξεκινάει από το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ (δηλαδή για $t \geq t_0$), ενώ το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}'_-(t_0)$ είναι εφαπτόμενο στην *προέκταση* του τμήματος της τροχιάς το οποίο καταλήγει στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ (δηλαδή για $t \leq t_0$).

Ορισμός 2.11. *Έστω $\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$ καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι* **λεία** *ή* **ομαλή**, *αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος I και η παράγωγος $\boldsymbol{\sigma}'$ είναι συνεχής στο I. Λέμε ότι η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι* **τμηματικά λεία** *ή* **τμηματικά ομαλή**, *αν το I χωρίζεται σε διαδοχικά υποδιαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ έτσι ώστε σε κάθε υποδιάστημα I_k η παράγωγος $\boldsymbol{\sigma}'$ υπάρχει (στα άκρα του I_k θεωρούμε τις πλευρικές παραγώγους) και είναι συνεχής στο I_k.*

Παράδειγμα 2.30. Η καμπύλη με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$, $t \in \mathbb{R}$, η οποία διαγράφει την ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathbf{x}_0$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, είναι λεία. Πράγματι, η $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{v}$ είναι σταθερή και άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.31. Η καμπύλη η οποία διαγράφει τον κύκλο κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r, δηλαδή η καμπύλη με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (r \cos t + x_0, r \sin t + y_0)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι λεία. Πράγματι, η $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.32. Θεωρούμε τρία σημεία $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ στον $\mathbb{R}^n$, και την καμπύλη με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{cases} t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mathbf{a}, & 0 \leq t \leq 1, \\ (t-1)\mathbf{c} + (2-t)\mathbf{b} = t(\mathbf{c} - \mathbf{b}) + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Η τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η ένωση των ευθυγράμμων τμημάτων από το $\mathbf{a}$ στο $\mathbf{b}$ και από το $\mathbf{b}$ στο $\mathbf{c}$. Η $\boldsymbol{\sigma}$ έχει παράγωγο

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \begin{cases} \mathbf{b} - \mathbf{a}, & 0 \leq t < 1, \\ \mathbf{c} - \mathbf{b}, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Στο $t = 1$ υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι: $\boldsymbol{\sigma}'_-(1) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ και $\boldsymbol{\sigma}'_+(1) = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ (κάντε προσεκτικά τον υπολογισμό των πλευρικών ορίων). Αν $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, τότε η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι λεία, ενώ, αν $\mathbf{b} - \mathbf{a} \neq \mathbf{c} - \mathbf{b}$, τότε η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι τμηματικά λεία.

2.8 Κατά κατεύθυνση παράγωγος πραγματικής συνάρτησης.

Θεωρούμε μία *πραγματική* συνάρτηση

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n$$

και ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό του πεδίου ορισμού U της f. Επίσης θεωρούμε μία καμπύλη

$$\boldsymbol{\sigma} : I \to U$$

έτσι ώστε για κάποιο εσωτερικό σημείο t_0 του διαστήματος I να ισχύει $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Επειδή το σύνολο τιμών της $\boldsymbol{\sigma}$, δηλαδή η τροχιά της, περιέχεται στο σύνολο U, λέμε ότι η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι **καμπύλη στο** U. Κατόπιν θεωρούμε την σύνθεση

$$h = f \circ \boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}.$$

Τώρα, αν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και η f είναι παραγωγίσιμη (ως συνάρτηση n μεταβλητών) στο $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = \mathbf{x}_0$, τότε η πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής h είναι παραγωγίσιμη στο t_0, και από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$Dh(t_0) = Df(\mathbf{x}_0)D\boldsymbol{\sigma}(t_0). \tag{2.27}$$

Τώρα γράφουμε αναλυτικά, βάσει των συντεταγμένων συναρτήσεων της $\boldsymbol{\sigma}$:

$$h(t) = f(\boldsymbol{\sigma}(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in I.$$

Τότε ο κανόνας της αλυσίδας, δηλαδή η σχέση (2.23), λέει ότι

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\frac{dx_1}{dt}(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\frac{dx_n}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1'(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)x_n'(t_0).$$

Επομένως, η σχέση (2.27) γράφεται και

$$h'(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t_0). \tag{2.28}$$

Αυτή είναι μία *πολύ χρήσιμη* σχέση.

Αμέσως έχουμε μία *πολύ χρήσιμη* ειδική περίπτωση. Θεωρούμε την *ευθύγραμμη καμπύλη* $\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{x}_0, \quad t \in I,$$

όπου θεωρούμε ένα διάστημα I το οποίο περιέχει το χρονικό σημείο $t_0 = 0$ ως εσωτερικό του σημείο, οπότε

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Επίσης, θεωρούμε το διάστημα I γύρω από το $t_0 = 0$ να είναι αρκετά μικρό ώστε το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο αποτελεί την τροχιά της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού U της f (ώστε να έχει νόημα η σύνθεση $h = f \circ \boldsymbol{\sigma}$). Τότε η σύνθεση $h = f \circ \boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}$ έχει φυσικά τύπο

$$h(t) = f(\boldsymbol{\sigma}(t)) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}), \quad t \in I.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\boldsymbol{\sigma}'(0) = \mathbf{v}.$$

Άρα σ' αυτήν την ειδική περίπτωση, και αφού σκεφτούμε ότι $h'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t)-h(0)}{t}$, από την σχέση (2.28) προκύπτει

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t} = h'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}. \tag{2.29}$$

Όταν εφαρμόζουμε τα προηγούμενα, συνήθως θεωρούμε διανύσματα $\mathbf{v}$ μήκους 1:

$$\|\mathbf{v}\| = 1.$$

Ορισμός 2.12. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, πραγματική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του U, και διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ με μήκος $\|\mathbf{v}\| = 1$. Το αριστερό μέρος της (2.29) ονομάζεται* **παράγωγος στην κατεύθυνση v** *της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ και συμβολίζεται $D_\mathbf{v}f(\mathbf{x}_0)$. Δηλαδή,*

$$D_\mathbf{v}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

Άρα η σχέση (2.29) λέει ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $\|\mathbf{v}\| = 1$, τότε ισχύει

$$D_\mathbf{v}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}. \tag{2.30}$$

Ας δούμε τώρα το περιεχόμενο του λόγου $\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t}$ όταν $t > 0$. Θεωρούμε σημείο $\mathbf{x}$ πάνω στην *ημιευθεία* $l_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ με κορυφή το $\mathbf{x}_0$ και κατεύθυνση $\mathbf{v}$ (με $\|\mathbf{v}\| = 1$), δηλαδή $\mathbf{x} = t\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$, $t > 0$. Τότε ο *ρυθμός μεταβολής* των τιμών της f από το σημείο $\mathbf{x}_0$ στο σημείο $\mathbf{x}$ είναι ίσος με

$$\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = \frac{f(t\mathbf{v}+\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x}_0)}{\|t\mathbf{v}\|} = \frac{f(t\mathbf{v}+\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x}_0)}{|t|\|\mathbf{v}\|} = \frac{f(t\mathbf{v}+\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

Τώρα, ο *στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής* των τιμών της f στην ημιευθεία $l_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ στο σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι, εξ ορισμού, το όριο του λόγου $\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$ όταν το $\mathbf{x}$ πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$ κινούμενο πάνω στην ημιευθεία $l_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$, δηλαδή το όριο

$$\lim_{\mathbf{x}\in l_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0),\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}.$$

Άρα, βάσει της τελευταίας ισότητας, βάσει του ορισμού του $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$, και βάσει της ισότητας (2.30), ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής των τιμών της f στην ημιευθεία $l_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ στο σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι ίσος με

$$\lim_{\mathbf{x}\in l_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0),\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(t\mathbf{v}+\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x}_0)}{t} = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v}.$$

Επομένως, έχουμε το εξής ιδιαιτέρως σημαντικό.

Αν θεωρήσουμε τις τιμές της f στα σημεία της ημιευθείας $l_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ με κορυφή το $\mathbf{x}_0$ και κατεύθυνση $\mathbf{v}$, όπου $\|\mathbf{v}\| = 1$, τότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής αυτών των τιμών της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι ίσος με την παράγωγο στην κατεύθυνση $\mathbf{v}$ της f στο $\mathbf{x}_0$ καθώς και με το εσωτερικό γινόμενο της κλίσης της f στο $\mathbf{x}_0$ και του διανύσματος $\mathbf{v}$.

Γνωρίζουμε ότι, αν δύο διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι μη-μηδενικά, τότε αυτά σχηματίζουν *κυρτή γωνία* θ η οποία ικανοποιεί τις

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta, \quad \theta\in[0,\pi].$$

Άρα, αν στα προηγούμενα έχουμε ότι $\|\mathbf{v}\| = 1$ και ότι το διάνυσμα $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ είναι μη-μηδενικό, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την κυρτή γωνία $\theta \in [0,\pi]$ την οποία σχηματίζουν τα διανύσματα $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{v}$, και τότε έχουμε συνολικά ότι

$$\lim_{\mathbf{x}\in l_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0),\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\cos\theta.$$

Οι τιμές του $\cos\theta$ κυμαίνονται στο διάστημα $[-1,1]$ και είναι: $\cos\theta = 1$ όταν $\theta = 0$, $\cos\theta = -1$ όταν $\theta = \pi$, και $\cos\theta = 0$ όταν $\theta = \frac{\pi}{2}$. Επομένως, έχουμε τα εξής σημαντικά συμπεράσματα, τα οποία εκφράζουν ουσιαστικά την γεωμετρική σημασία της κλίσης $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ της f στο $\mathbf{x}_0$:

Ο μέγιστος θετικός στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής των τιμών της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ στην κατεύθυνση $\mathbf{v}$ πιάνεται όταν το $\mathbf{v}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ και είναι ίσος με $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$.

Ο μέγιστος αρνητικός στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής των τιμών της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ στην κατεύθυνση $\mathbf{v}$ πιάνεται όταν το $\mathbf{v}$ έχει την αντίθετη κατεύθυνση με το $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ και είναι ίσος με $-\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$.

Μηδενικός στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής των τιμών της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ στην κατεύθυνση $\mathbf{v}$ πιάνεται όταν το $\mathbf{v}$ και το $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ είναι κάθετα.

Παράδειγμα 2.33. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^2 + y^2$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Στο σημείο $(1,0)$ η κλίση της f είναι ίση με

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) = (2,0).$$

Άρα η παράγωγος στην κατεύθυνση $\mathbf{v} = (0,1)$ της f στο σημείο $(1,0)$ είναι ίση με

$$D_{(0,1)}f(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot(0,1) = (2,0)\cdot(0,1) = 0.$$

Για να βρούμε την κατεύθυνση **v** ώστε η παράγωγος σ' αυτήν την κατεύθυνση της f στο σημείο $(1,0)$ να είναι μέγιστη θετική, σκεφτόμαστε ότι το διάνυσμα **v** πρέπει να έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα $\nabla f(1,0)$ και να έχει μήκος ίσο με 1, δηλαδή να είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{v} = \tfrac{1}{\|\nabla f(1,0)\|}\,\nabla f(1,0) = \tfrac{1}{\|(2,0)\|}\,(2,0) = (1,0).$$

Το αντίθετο διάνυσμα, δηλαδή το $\mathbf{v} = (-1,0)$, αποτελεί την κατεύθυνση στην οποία η παράγωγος της f στο σημείο $(1,0)$ είναι μέγιστη αρνητική.
Τέλος, για να βρούμε τις κατευθύνσεις **v** ώστε η παράγωγος σ' αυτές τις κατευθύνσεις της f στο σημείο $(1,0)$ να είναι μηδενική, σκεφτόμαστε ότι το διάνυσμα **v** πρέπει να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\nabla f(1,0)$ και να έχει μήκος ίσο με 1. Δηλαδή, αν $\mathbf{v} = (a,b)$, τότε πρέπει να είναι

$$\nabla f(1,0)\cdot(a,b) = 0, \quad a^2+b^2 = 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$a = 0, \quad a^2+b^2 = 1.$$

Έχουμε δύο λύσεις: $\mathbf{v} = (0,1)$ και $\mathbf{v} = (0,-1)$.

Παράδειγμα 2.34. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z) = xy+xz+yz$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Στο σημείο $(1,0,-2)$ η κλίση της f είναι ίση με

$$\nabla f(1,0,-2) = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(1,0,-2), \tfrac{\partial f}{\partial y}(1,0,-2), \tfrac{\partial f}{\partial z}(1,0,-2)\big) = (-2,-1,1).$$

Για να βρούμε την κατεύθυνση **v** ώστε η παράγωγος σ' αυτήν την κατεύθυνση της f στο σημείο $(1,0,-2)$ να είναι μέγιστη θετική, σκεφτόμαστε ότι το διάνυσμα **v** πρέπει να έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα $\nabla f(1,0,-2)$ και να έχει μήκος ίσο με 1, δηλαδή να είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{v} = \tfrac{1}{\|\nabla f(1,0,-2)\|}\,\nabla f(1,0,-2) = \tfrac{1}{\|(-2,-1,1)\|}\,(-2,-1,1) = \big(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\big).$$

Το αντίθετο διάνυσμα, δηλαδή το $\mathbf{v} = \big(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\big)$, αποτελεί την κατεύθυνση στην οποία η παράγωγος της f στο σημείο $(1,0)$ είναι μέγιστη αρνητική.
Τέλος, για να βρούμε τις κατευθύνσεις **v** ώστε η παράγωγος σ' αυτές τις κατευθύνσεις της f στο σημείο $(1,0,-2)$ να είναι μηδενική, σκεφτόμαστε ότι το διάνυσμα **v** πρέπει να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\nabla f(1,0,-2)$ και να έχει μήκος ίσο με 1. Δηλαδή, αν $\mathbf{v} = (a,b,c)$, τότε πρέπει να είναι

$$\nabla f(1,0,-2)\cdot(a,b,c) = 0, \quad a^2+b^2+c^2 = 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$-2a-b+c = 0, \quad a^2+b^2+c^2 = 1.$$

Προκύπτει σύστημα (μη-γραμμικό) δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Μπορούμε να το λύσουμε σχετικά εύκολα, αλλά είναι πολύ πιο χρήσιμο να περιγράψουμε γεωμετρικά τις λύσεις. Τα διανύσματα $\mathbf{v} = (a,b,c)$ τα οποία ζητάμε είναι κάθετα στο διάνυσμα $(-2,-1,1)$ και έχουν μήκος ίσο με 1. Αν L είναι το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο $(0,0,0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $(-2,-1,1)$, τότε τα σημεία (a,b,c) είναι τα σημεία του κύκλου του επιπέδου L ο οποίος έχει κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα ίση με 1.

2.9 Παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Όπως και τις πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής, ενδέχεται να μπορούμε να παραγωγίσουμε μία πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών περισσότερες από μία φορές ως προς κάποιες μεταβλητές της. Να μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.35. Για την $f(x,y) = x^2y + xy^3$ έχουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3xy^2,$$

και άρα τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = 2y, && \tfrac{\partial}{\partial y}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = 2x + 3y^2, \\ &\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = 2x + 3y^2, && \tfrac{\partial}{\partial y}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = 6xy. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.36. Για την $f(x,y) = \sin(xy^2)$ έχουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = y^2\cos(xy^2), \quad \tfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy\cos(xy^2),$$

και άρα τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = -y^4\sin(xy^2), && \tfrac{\partial}{\partial y}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2), \\ &\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2), && \tfrac{\partial}{\partial y}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = 2x\cos(xy^2) - 4x^2y^2\sin(xy^2). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.37. Για την $f(x,y,z) = x^2yz^3$ έχουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3, \quad \tfrac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2,$$

και άρα τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = 2yz^3, && \tfrac{\partial}{\partial y}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = 2xz^3, && \tfrac{\partial}{\partial z}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = 6xyz^2, \\ &\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = 2xz^3, && \tfrac{\partial}{\partial y}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = 0, && \tfrac{\partial}{\partial z}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = 3x^2z^2, \\ &\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial z}\big) = 6xyz^2, && \tfrac{\partial}{\partial y}\big(\tfrac{\partial f}{\partial z}\big) = 3x^2z^2, && \tfrac{\partial}{\partial z}\big(\tfrac{\partial f}{\partial z}\big) = 6x^2yz. \end{aligned}$$

Στα τρία προηγούμενα παραδείγματα θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε παραγωγίζοντας κάθε μερική παράγωγο δεύτερης τάξης ως προς καθεμία από τις μεταβλητές παίρνοντας έτσι τις μερικές παραγώγους τρίτης τάξης και ούτω καθ' εξής.

Αν, λοιπόν, έχουμε συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, τότε (με την προϋπόθεση ότι μπορούμε να παραγωγίζουμε) υπάρχουν n μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης:

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad 1 \le j \le n,$$

υπάρχουν n^2 μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης:

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x_j}\big)(\mathbf{x}), \quad 1 \le i, j \le n,$$

υπάρχουν n^3 μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης:

$$\tfrac{\partial}{\partial x_k}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x_j}\big)\big)(\mathbf{x}), \quad 1 \le k, i, j \le n,$$

και, γενικότερα, υπάρχουν n^k μερικές παράγωγοι k-οστής τάξης.

Για απλούστευση των συμβόλων χρησιμοποιούμε τις συντμήσεις

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \quad \text{αντί} \quad \tfrac{\partial}{\partial x_i}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x_j}\big)(\mathbf{x}), \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) \quad \text{αντί} \quad \tfrac{\partial}{\partial x_i}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\big)(\mathbf{x}),$$

$$\tfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \quad \text{αντί} \quad \tfrac{\partial}{\partial x_k}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x_j}\big)\big)(\mathbf{x}),$$

και ούτω καθ' εξής.

Στην πραγματικότητα το πλήθος των μερικών παραγώγων τάξης $k \ge 2$ είναι μικρότερο από το αναφερόμενο n^k. Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά τα τρία παραδείγματα θα δούμε ότι η αλλαγή της σειράς παραγώγισης ως προς δύο διαφορετικές μεταβλητές δεν αλλάζει το αποτέλεσμα. Στα δύο πρώτα παραδείγματα έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

και στο τρίτο παράδειγμα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}.$$

Αυτό δεν είναι τυχαίο και ισχύει κάτω από ασθενείς υποθέσεις, όπως το ότι αρκεί οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι να είναι συνεχείς. Ας το αποδείξουμε για συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$.

Πρόταση 2.6. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$, και εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του U. Αν η f έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ σε κάθε σημείο (x, y) ενός δίσκου με κέντρο το (x_0, y_0) και θετική ακτίνα, και αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο (x_0, y_0), τότε*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0). \tag{2.31}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την παράσταση

$$R(x, y) = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0).$$

Ορίζουμε την συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$g(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$$

και παρατηρούμε ότι

$$R(x, y) = g(x) - g(x_0) = \frac{dg}{dx}(\xi)(x - x_0) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\big)(x - x_0) \tag{2.32}$$

για κάποιο ξ ανάμεσα στα x_0, x. Ομοίως, ορίζουμε την συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$h(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y),$$

οπότε από την (2.32) έχουμε

$$R(x, y) = (h(y) - h(y_0))(x - x_0) = \frac{dh}{dy}(\eta)(y - y_0)(x - x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0)$$

για κάποιο η ανάμεσα στα y_0, y. Τώρα, αν $(x, y) \to (x_0, y_0)$, συνεπάγεται $(\xi, \eta) \to (x_0, y_0)$, οπότε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)} = \lim_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0), \tag{2.33}$$

επειδή η $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ είναι συνεχής στο (x_0, y_0).
Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία αλλά με μία μικρή παραλλαγή. Τώρα ορίζουμε την συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$g(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$$

και παρατηρούμε ότι

$$R(x, y) = g(y) - g(y_0) = \frac{dg}{dy}(\overline{\eta})(y - y_0) = \big(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{\eta}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{\eta})\big)(y - y_0) \tag{2.34}$$

για κάποιο $\overline{\eta}$ ανάμεσα στα y_0, y. Ομοίως, ορίζουμε την συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$h(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{\eta}),$$

οπότε από την (2.34) έχουμε

$$R(x, y) = (h(x) - h(x_0))(y - y_0) = \frac{dh}{dx}(\overline{\xi})(x - x_0)(y - y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi}, \overline{\eta})(x - x_0)(y - y_0)$$

για κάποιο $\overline{\xi}$ ανάμεσα στα x_0, x. Τώρα, αν $(x, y) \to (x_0, y_0)$, συνεπάγεται $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \to (x_0, y_0)$, οπότε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)} = \lim_{(\overline{\xi},\overline{\eta})\to(x_0,y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \tag{2.35}$$

επειδή η $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ είναι συνεχής στο (x_0, y_0).
Από τις (2.33), (2.35) καταλήγουμε στην (2.31). □

2.10 Ανάπτυγμα Taylor

2.10.1 Ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης.

Τώρα θυμόμαστε το αποτέλεσμα από τον Απειροστικό Λογισμό μίας μεταβλητής, το οποίο αναφέρεται ως **ανάπτυγμα Taylor n-οστής τάξης**: *αν μία συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε*

$$g(b) = g(a) + \tfrac{g'(a)}{1!}(b-a) + \tfrac{g''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \tfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \tfrac{g^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

για κάποιο $\xi \in (a,b)$. Στην ειδική περίπτωση $n=1$ έχουμε το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης:

$$g(b) = g(a) + g'(\xi)(b-a). \tag{2.36}$$

Αυτό είναι απλώς το περιεχόμενο του θεωρήματος μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Στην περίπτωση $n=2$ έχουμε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης:

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + \tfrac{g''(\xi)}{2}(b-a)^2. \tag{2.37}$$

Τώρα θα δούμε και θα αποδείξουμε τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης για πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών. Υπάρχει, φυσικά, και το γενικότερο ανάπτυγμα Taylor τάξης μεγαλύτερης του 2, αλλά δεν θα αναφερθούμε σ' αυτό.

Ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του U. Αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ μίας μπάλας με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και θετική ακτίνα, τότε ισχύει*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R(\mathbf{x}) \tag{2.38}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$, όπου η συνάρτηση $R : U \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \tfrac{R(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0. \tag{2.39}$$

Απόδειξη. Αυτό το αποτέλεσμα είναι ακριβώς ο ορισμός της παραγωγισιμότητας της f στο $\mathbf{x}_0$, όπως αυτή εκφράζεται από το πρώτο όριο (2.18). Το ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ προκύπτει από την συνέχεια των μερικών παραγώγων της f στο $\mathbf{x}_0$ και από το κριτήριο παραγωγισιμότητας. Θα αποδείξουμε, όμως, το αποτέλεσμα και με δεύτερο τρόπο, χρησιμοποιώντας την (2.36). Αυτή η δεύτερη απόδειξη θα μας προετοιμάσει για την απόδειξη του αναπτύγματος Taylor δεύτερης τάξης, το οποίο θα ακολουθήσει.
Ορίζουμε την συνάρτηση $R : U \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$R(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \textstyle\sum_{j=1}^n \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

οπότε αυτομάτως ισχύει η (2.38) και άρα απομένει να αποδείξουμε ότι ισχύει το όριο (2.39).
Αν $B_r(\mathbf{x}_0)$ είναι μία μπάλα σε κάθε σημείο της οποίας οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$ ορίζουμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \quad t \in [0,1].$$

Η $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι σύνθεση της συνάρτησης $\mathbf{h} : [0,1] \to B_r(\mathbf{x}_0) \subseteq U$ με τύπο

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad t \in [0,1],$$

και της $f : U \to \mathbb{R}$. Επειδή η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάθε σημείο της $B_r(\mathbf{x}_0)$, είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της $B_r(\mathbf{x}_0)$. Η $\mathbf{h}$ είναι προφανώς παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in [0,1]$, και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα αλυσίδας. Ο τύπος της $\mathbf{h}$ γράφεται

$$\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t)) = \big(x_{01} + t(x_1 - x_{01}), \dots, x_{0n} + t(x_n - x_{0n})\big)$$

και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g'(t) &= \tfrac{dg}{dt}(t) = \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))\tfrac{dh_1}{dt}(t) + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))\tfrac{dh_n}{dt}(t) \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(x_1 - x_{01}) + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(x_n - x_{0n}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(x_j - x_{0j}) \end{aligned} \tag{2.40}$$

για κάθε $t \in [0,1]$.
Τώρα, είναι $g(0) = f(\mathbf{x}_0)$ και $g(1) = f(\mathbf{x})$, οπότε από την (2.36) στο διάστημα $[0,1]$ παίρνουμε:

$$f(\mathbf{x}) = g(1) = g(0) + g'(\xi)(1-0) = f(\mathbf{x}_0) + \textstyle\sum_{j=1}^n \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(x_j - x_{0j})$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$. Συγκρίνοντας αυτόν τον τύπο με τον τύπο ο οποίος ορίζει την $R(\mathbf{x})$, βρίσκουμε ότι

$$R(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{j=1}^n \big(\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) - \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\big)(x_j - x_{0j}).$$

Απλουστεύουμε, θέτοντας

$$a_j(\mathbf{x}) = \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) - \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad 1 \le j \le n, \tag{2.41}$$

οπότε

$$R(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x})(x_j - x_{0j}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

όπου

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})).$$

Συνεπάγεται

$$|R(\mathbf{x})| \le \|\mathbf{a}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

και άρα

$$0 \le \tfrac{|R(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \le \|\mathbf{a}(\mathbf{x})\| = \big(\textstyle\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x})^2\big)^{1/2} \tag{2.42}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Από τους τύπους (2.41) παίρνουμε ότι $a_j(\mathbf{x}) \to 0$ όταν $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, επειδή οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ είναι συνεχείς και επειδή $\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \to \mathbf{x}_0$ όταν $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ (το ξ είναι στο διάστημα $[0,1]$ και άρα είναι φραγμένο). Από την ιδιότητα παρεμβολής και την (2.42), καταλήγουμε στην (2.39). □

Παράδειγμα 2.38. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x,y) = 2x - e^{x-2y}.$$

Τότε

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = 2 - e^{x-2y}, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y} = 2e^{x-2y},$$

οπότε

$$\nabla f(0,0) = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\big) = (1,2).$$

Οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^2$, οπότε το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι το

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + R(x,y) = -1 + x + 2y + R(x,y),$$

όπου η συνάρτηση $R(x,y)$ είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Επειδή, προφανώς, είναι

$$R(x,y) = f(x,y) + 1 - x - 2y = 2x - e^{x-2y} + 1 - x - 2y = x - e^{x-2y} + 1 - 2y,$$

το τελευταίο όριο σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x - e^{x-2y} + 1 - 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Παράδειγμα 2.39. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x,y,z) = 2 - x + z - 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz + x^3 - x^2y + 3xyz.$$

Τότε

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = -1 - 4x - 2y + 4z + 3x^2 - 2xy + 3yz, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x + 2z - x^2 + 3xz,$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial z} = 1 + 6z + 4x + 2y + 3xy,$$

οπότε

$$\nabla f(0,0,0) = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0), \tfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\big) = (-1,0,1).$$

Οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^3$, οπότε το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης της f στο σημείο $(0,0,0)$ είναι το

$$f(x,y,z) = f(0,0,0) + \nabla f(0,0,0)\cdot(x,y,z) + R(x,y,z) = 2 - x + z + R(x,y,z),$$

όπου η συνάρτηση $R(x,y)$ είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \tfrac{R(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

Επειδή

$$R(x,y,z) = f(x,y,z) - 2 + x - z = -2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz + x^3 - x^2y + 3xyz,$$

το τελευταίο όριο σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \tfrac{-2x^2+y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz+x^3-x^2y+3xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

2.10.2 Ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης.

Το λήμμα 2.1 λέει ότι, αν έχουμε έναν $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|A\mathbf{x}\| \le M\|\mathbf{x}\|,$$

όπου M είναι ο αριθμός

$$M = \big(\textstyle\sum_{i=1}^m \|\mathbf{a}_i\|^2\big)^{1/2} = \big(\sum_{i=1}^m \big(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\big)\big)^{1/2} = \big(\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}^2\big)^{1/2}$$

και $\mathbf{a}_i = (a_{i1},\dots,a_{in})$ είναι η i-οστή γραμμή του πίνακα A.

Ορισμός 2.13. *Θεωρούμε n^2 αριθμούς a_{ij}, $1 \le i,j \le n$, και την συνάρτηση $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$Q(\mathbf{x}) = Q(x_1,\dots,x_n) = \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση Q ονομάζεται **τετραγωνική μορφή** *n μεταβλητών. Οι αριθμοί a_{ij} ονομάζονται* **συντελεστές** *της τετραγωνικής μορφής Q.*
Αν ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε (i,j), τότε η τετραγωνική μορφή Q ονομάζεται **συμμετρική**.

Αν θεωρήσουμε τον $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

με στοιχεία τους αριθμούς a_{ij}, είναι προφανές ότι η τετραγωνική μορφή Q και ο πίνακας A αλληλοκαθορίζονται: κάθε τετραγωνική μορφή αντιστοιχεί σε έναν πίνακα και κάθε πίνακας αντιστοιχεί σε μία τετραγωνική μορφή. Προφανώς, η τετραγωγική μορφή Q είναι συμμετρική αν και μόνο αν ο αντίστοιχος πίνακας A είναι συμμετρικός.

Πέρα από την απλή σχέση ανάμεσα στην τετραγωνική μορφή Q και στον πίνακα A η οποία έχει να κάνει με την ισότητα των συντελεστών της Q και των συντεταγμένων του A, υπάρχει και μία ουσιαστικότερη (και χρησιμότερη) σχέση. Πράγματι, κάνοντας πράξεις με πίνακες, βλέπουμε ότι το διπλό άθροισμα ισούται με ένα γινόμενο τριών πινάκων:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}, \tag{2.43}$$

όπου το $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ το γράφουμε ως $n \times 1$ πίνακα-στήλη, και τότε το $\mathbf{x}^\top$ είναι ο συμμετρικός $1 \times n$ πίνακας-γραμμή. Γενικά, με $B^\top$ συμβολίζουμε τον **συμμετρικό** πίνακα ενός πίνακα B.

Αν η τετραγωνική μορφή Q είναι συμμετρική, τότε κάθε όρος στο άθροισμα $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ με *διαφορετικούς* δείκτες i, j υπάρχει δύο φορές: $a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_jx_i$. Γι αυτό μία συμμετρική τετραγωνική μορφή γράφεται και

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j,$$

ομαδοποιώντας ξεχωριστά τους “διαγώνιους” όρους με $i = j$ και ξεχωριστά τους “μη-διαγώνιους” όρους με $i \neq j$.

Παράδειγμα 2.40.

$$2x^2 - y^2 + 3xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2.41.

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 5xz - yz = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ -5/2 & -1/2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Τώρα, αν συνδυάσουμε την ταυτότητα (2.43) με το λήμμα 2.1, έτσι όπως αυτό το ξαναείδαμε στην αρχή αυτής της ενότητας, και με την ανισότητα του Cauchy, καταλήγουμε στην ανισότητα:

$$|Q(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}| \le \|\mathbf{x}\|\|A\mathbf{x}\| \le M\|\mathbf{x}\|^2, \tag{2.44}$$

όπου

$$M = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Ορισμός 2.14. *Έστω πραγματική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του U. Αν η f έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο $\mathbf{x}_0$, τότε θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Hf(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) = Hf(\mathbf{x}_0)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)x_ix_j.$$

Αυτή η τετραγωνική μορφή ονομάζεται **Εσσιανή τετραγωνική μορφή** *της f στο $\mathbf{x}_0$. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας, τον οποίο συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο $Hf(\mathbf{x}_0)$, είναι ο*

$$Hf(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

και ονομάζεται **Εσσιανός πίνακας** *της f στο $\mathbf{x}_0$.*

Οι συντελεστές της τετραγωνικής μορφής είναι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f στο $\mathbf{x}_0$ και, όπως έχουμε αποδείξει, είναι συμμετρικοί: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$. Δηλαδή, η Εσσιανή τετραγωνική μορφή είναι συμμετρική και ο Εσσιανός πίνακας είναι συμμετρικός.

Η σχέση (2.43) ανάμεσα στην Εσσιανή τετραγωνική μορφή και στον Εσσιανό πίνακα γράφεται

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top Hf(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}, \tag{2.45}$$

όπου το $\mathbf{x}$ στην αριστερή μεριά της ισότητας είναι διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και στην δεξιά μεριά της είναι $n \times 1$ πίνακας-στήλη.

Ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του U. Αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ μίας μπάλας με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και θετική ακτίνα, τότε ισχύει*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \tfrac{1}{2} Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R(\mathbf{x}) \tag{2.46}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$, όπου η συνάρτηση $R : U \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \tfrac{R(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = 0. \tag{2.47}$$

Απόδειξη. Μιμούμενοι την απόδειξη του αναπτύγματος Taylor πρώτης τάξης, ορίζουμε την συνάρτηση $R : U \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \\ &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \tfrac{1}{2} Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned} \tag{2.48}$$

οπότε αυτομάτως ισχύει η (2.46) και απομένει να αποδείξουμε ότι ισχύει το όριο (2.47).
Αν $B_r(\mathbf{x}_0)$ είναι μία μπάλα σε κάθε σημείο της οποίας οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f είναι συνεχείς, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$ ορίζουμε, όπως στην απόδειξη του αναπτύγματος Taylor πρώτης τάξης, την συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \quad t \in [0, 1].$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει στον τύπο (2.40) την πρώτη παράγωγο της g. Από εκεί έχουμε:

$$g''(t) = \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\big)(x_j - x_{0j}). \tag{2.49}$$

Τώρα προσέξτε. Ο τύπος (2.40) λέει το εξής:

$$\tfrac{d}{dt}\big(f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\big) = \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x_i - x_{0i}).$$

(Αλλάξαμε το σύμβολο του δείκτη από j σε i.) Εφαρμόζουμε αυτό το αποτέλεσμα, τοποθετώντας την συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ στη θέση της f, και βρίσκουμε ότι

$$\tfrac{d}{dt}\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\big) = \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x_i - x_{0i}).$$

Άρα η σχέση (2.49) γίνεται

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^n \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(x_i - x_{0i})\big)(x_j - x_{0j}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε $g(0) = f(\mathbf{x}_0)$, $g(1) = f(\mathbf{x})$ και, από την (2.40), $g'(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j})$. Άρα από την (2.37) στο διάστημα $[0,1]$ παίρνουμε:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$. Συγκρίνοντας αυτήν την ισότητα με την (2.48), βρίσκουμε ότι

$$R(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \big(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) - \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\big)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}).$$

Απλουστεύουμε, θέτοντας

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) - \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad 1 \le i,j \le n, \tag{2.50}$$

οπότε το $R(\mathbf{x})$ γράφεται σαν μια τετραγωνική μορφή:

$$R(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\top A(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{2.51}$$

όπου

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & \dots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\mathbf{x}) & \dots & a_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την γενική ανισότητα (2.44) για τετραγωνικές μορφές, και βρίσκουμε

$$|R(\mathbf{x})| \le \tfrac{1}{2}\,M(\mathbf{x})\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2,$$

όπου

$$M(\mathbf{x}) = \big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})^2\big)^{1/2}.$$

Άρα

$$0 \le \tfrac{|R(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} \le \tfrac{1}{2}\,M(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\,\big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})^2\big)^{1/2}. \tag{2.52}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x} \ne \mathbf{x}_0$. Από τους τύπους (2.50) παίρνουμε ότι $a_{ij}(\mathbf{x}) \to 0$ όταν $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, επειδή οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ είναι συνεχείς και επειδή $\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \to \mathbf{x}_0$ όταν $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής στην (2.52) και καταλήγουμε στην (2.47). □

Θα ξαναδούμε τα δύο παραδείγματα της προηγούμενης υποενότητας, αλλά σε σχέση με το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα 2.42. Θεωρούμε πάλι την συνάρτηση

$$f(x,y) = 2x - e^{x-2y}.$$

Τότε, όπως είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, είναι

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = 2 - e^{x-2y}, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y} = 2e^{x-2y}$$

και

$$\nabla f(0,0) = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\big) = (1,2).$$

Επιπλέον, είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2e^{x-2y}$$

και επομένως

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -4, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 2.$$

Άρα ο Εσσιανός πίνακας της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

και η Εσσιανή τετραγωνική μορφή της f στο σημείο $(0,0)$ είναι η συνάρτηση

$$Hf(0,0)(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy = -x^2 - 4y^2 + 4xy.$$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f είναι συνεχείς σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^2$, οπότε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι το

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \tfrac{1}{2} Hf(0,0)(x,y) + R(x,y) \\ &= -1 + x + 2y - \tfrac{1}{2}x^2 - 2y^2 + 2xy + R(x,y), \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $R(x,y)$ είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{R(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Επειδή, προφανώς, είναι

$$R(x,y) = f(x,y) + 1 - x - 2y + \tfrac{1}{2}x^2 + 2y^2 - 2xy = x - e^{x-2y} + 1 - 2y + \tfrac{1}{2}x^2 + 2y^2 - 2xy,$$

το τελευταίο όριο σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x - e^{x-2y} + 1 - 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 - 2xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Παράδειγμα 2.43. Θεωρούμε πάλι την συνάρτηση

$$f(x,y,z) = 2 - x + z - 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz + x^3 - x^2y + 3xyz.$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, είναι

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -1 - 4x - 2y + 4z + 3x^2 - 2xy + 3yz, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 2x + 2z - x^2 + 3xz,$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 + 6z + 4x + 2y + 3xy$$

και

$$\nabla f(0,0,0) = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0), \tfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\big) = (-1,0,1).$$

Τώρα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 + 6x - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 - 2x + 3z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 4 + 3y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2 + 3x,$$

και επομένως

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) = -4, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0) = 2, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) = 6,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0,0) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(0,0,0) = 4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(0,0,0) = 2.$$

Άρα ο Εσσιανός πίνακας της f στο σημείο $(0,0,0)$ είναι ο

$$Hf(0,0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

και η Εσσιανή τετραγωνική μορφή της f στο σημείο $(0,0,0)$ είναι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} Hf(0,0,0)(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0)y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0)z^2 \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0)xy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0)xz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0)yz \\ &= -4x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 4xy + 8xz + 4yz. \end{aligned}$$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f είναι συνεχείς σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^3$, οπότε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της f στο σημείο $(0,0,0)$ είναι το

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(0,0,0) + \nabla f(0,0,0) \cdot (x,y,z) + \tfrac{1}{2} Hf(0,0,0)(x,y,z) + R(x,y,z) \\ &= 2 - x + z - 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz + R(x,y,z), \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $R(x,y)$ είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{R(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

Επειδή

$$R(x,y,z) = f(x,y,z) - 2 + x - z + 2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy - 4xz - 2yz = x^3 - x^2y + 3xyz,$$

το τελευταίο όριο σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3 - x^2y + 3xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

Κεφάλαιο 3

Ακρότατα πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

3.1 Κριτήριο πρώτης παραγώγου.

Ορισμός 3.1. *Έστω πραγματική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{x}_0 \in U$.*
(i) Λέμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο **ολικού μεγίστου (ελαχίστου)** *της f, αν ισχύει $f(\mathbf{x}) \leq (\geq) f(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$.*
(ii) Λέμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο **τοπικού μεγίστου (ελαχίστου)** *της f, αν υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $f(\mathbf{x}) \leq (\geq) f(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$.*
(iii) Λέμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι **σαγματικό σημείο** *της f, αν δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου, δηλαδή αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ για κάποιο $\mathbf{x} \in U$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$, και ισχύει $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ για κάποιο $\mathbf{x} \in U$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$.*

Ψάχνοντας μεθόδους για να βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών, θυμόμαστε τί κάνουμε στην περίπτωση συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Αν μία πραγματική συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$ και αν το x_0 είναι *εσωτερικό σημείο* του I, τότε μία *αναγκαία* συνθήκη για να είναι το x_0 σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι η εξής: αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$, τότε είναι $f'(x_0) = 0$. Αυτό είναι το γνωστό θεώρημα του Fermat. Έχουμε και τα σχετικά παραδείγματα. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχει τοπικό (και μάλιστα, ολικό) ελάχιστο στο 0, υπάρχει η $f'(0)$ και είναι $f'(0) = 0$. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει τοπικό (και μάλιστα, ολικό) ελάχιστο στο 0 και δεν υπάρχει η $f'(0)$. Από την άλλη μεριά έχουμε και παραδείγματα συναρτήσεων τα οποία δείχνουν ότι η παραπάνω συνθήκη δεν είναι ικανή. Δηλαδή, το να μην υπάρχει η $f'(x_0)$ ή το να ισχύει $f'(x_0) = 0$ δεν συνεπάγεται ότι το x_0 είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Για την συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2x$ για $x \geq 0$ και $f(x) = x$ για $x \leq 0$ δεν υπάρχει η $f'(0)$ και δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 0. Επίσης, για την συνάρτηση $f(x) = x^3$ ισχύει $f'(0) = 0$ και η συνάρτηση δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 0. Πρέπει να τονιστεί ότι σε όλα τα προηγούμενα υποθέτουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I.

Μια ανάλογη αναγκαία συνθήκη για σημείο τοπικού ακροτάτου έχουμε και στην περίπτωση πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Κριτήριο πρώτης παραγώγου. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του U το οποίο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $\mathbf{x}_0$, τότε $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}_0$ του U είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f, και υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $\mathbf{x}_0$.
Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{αν } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r. \tag{3.1}$$

Για τυχόν $j = 1, \dots, n$ θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $h : (-r, r) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(t) = f(x_{01}, \dots, x_{0(j-1)}, x_{0j} + t, x_{0(j+1)}, \dots, x_{0n}) \quad \text{όταν } -r < t < r.$$

Βάσει της (3.1), ισχύει

$$h(t) \le h(0) \quad \text{όταν } -r < t < r.$$

Άρα το 0 είναι εσωτερικό σημείο μεγίστου της h στο διάστημα $(-r, r)$. Τώρα, επειδή υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, έχουμε ότι

$$h'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{01},\dots,x_{0(j-1)},x_{0j}+t,x_{0(j+1)},\dots,x_{0n}) - f(x_{01},\dots,x_{0(j-1)},x_{0j},x_{0(j+1)},\dots,x_{0n})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Τώρα, από το θεώρημα του Fermat συνεπάγεται $h'(0) = 0$, και άρα $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0$.
Αυτό, όμως, ισχύει για κάθε $j = 1, \dots, n$, οπότε $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.
Η απόδειξη είναι παρόμοια όταν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f. □

Παράδειγμα 3.1. Η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$, οπότε κάθε υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού. Επίσης, η f έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$, και άρα σε κάθε υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου. Άρα, αν το (x, y) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε πρέπει να είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Άρα το μοναδικό υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι το $(0, 0)$. Αφού έχουμε προσδιορίσει αυτό το υποψήφιο σημείο ακροτάτου, πρέπει να ελέγξουμε αν αυτό είναι πράγματι σημείο ακροτάτου (και τί είδους).
Είναι, όμως, αμέσως φανερό από τον τύπο της συνάρτησης ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της f, αφού ισχύει

$$f(0, 0) = 0 \le x^2 + y^2 = f(x, y) \quad \text{για κάθε } (x, y),$$

Παράδειγμα 3.2. Η συνάρτηση $f(x, y) = |x| + |y|$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$. Είναι προφανές ότι το σημείο $(0, 0)$ είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της f:

$$f(0, 0) = 0 \le |x| + |y| = f(x, y) \quad \text{για κάθε } (x, y).$$

Αλλά η f δεν έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο $(0, 0)$, αφού ούτε η συνάρτηση $f(x, 0) = |x|$ παραγωγίζεται στο 0 ούτε η συνάρτηση $f(0, y) = |y|$ παραγωγίζεται στο 0.

Παράδειγμα 3.3. Η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - y^2$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$, οπότε κάθε υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού. Επίσης, η f έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$ σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$, και άρα σε κάθε υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου. Επομένως, αν το (x, y) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε πρέπει να είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

Άρα το μοναδικό υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι το $(0, 0)$. Όπως στο πρώτο παράδειγμα, αφού έχουμε προσδιορίσει αυτό το υποψήφιο σημείο ακροτάτου, πρέπει να ελέγξουμε

αν αυτό είναι πράγματι σημείο ακροτάτου (και τί είδους).
Τώρα, όμως, βλέπουμε ότι υπάρχουν σημεία (x, y) όσο κοντά θέλουμε στο $(0, 0)$ στα οποία η f έχει τιμές μεγαλύτερες από την τιμή στο $(0, 0)$, αφού ισχύει $f(x, 0) = x^2 > 0 = f(0, 0)$ για κάθε $x \neq 0$. Επίσης, υπάρχουν σημεία (x, y) όσο κοντά θέλουμε στο $(0, 0)$ στα οποία η f έχει τιμές μικρότερες από την τιμή στο $(0, 0)$, αφού ισχύει $f(0, y) = -y^2 < 0 = f(0, 0)$ για κάθε $y \neq 0$.
Άρα το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο ακροτάτου, οπότε η f δεν έχει κανένα σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 3.4. Η συνάρτηση $f(x, y) = |x| - |y|$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το σημείο $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Επίσης, όπως στο προπροηγούμενο παράδειγμα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Παράδειγμα 3.5. Η συνάρτηση $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$, οπότε κάθε υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού. Επίσης, η f έχει μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{-x^2-y^2} - 2x(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{-x^2-y^2} - 2y(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$$

σε κάθε σημείο (x, y) του $\mathbb{R}^2$ και άρα είναι παραγωγίσιμη σε κάθε υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου. Άρα, αν το (x, y) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε πρέπει να είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} 2x(1 - x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ 2y(1 - x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα, βλέπουμε ότι τα υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της f είναι το $(0, 0)$ καθώς και όλα τα σημεία (x, y) με $x^2 + y^2 = 1$.
Είναι φανερό ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της f, αφού ισχύει

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2} \geq 0 = f(0, 0) \quad \text{για κάθε } (x, y).$$

Παίρνουμε τώρα τυχαίο σημείο (x_0, y_0) με $x_0^2 + y_0^2 = 1$ και ελέγχουμε αν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f: εξετάζουμε την ανισότητα

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

για να δούμε αν αυτή ισχύει για τα σημεία (x, y) τα οποία είναι κοντά στο (x_0, y_0). Αν καταλήξουμε ότι κάτι τέτοιο είναι σωστό, τότε το (x_0, y_0) είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Αν όχι, τότε θα εξετάσουμε αν ισχύει η ανάποδη ανισότητα $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ για τα σημεία (x, y) τα οποία είναι κοντά στο (x_0, y_0). Αν αυτό είναι σωστό, τότε το (x_0, y_0) είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Αν ούτε αυτό είναι σωστό, τότε το (x_0, y_0) δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Δηλαδή, υπάρχουν σημεία (x, y) όσο κοντά θέλουμε στο (x_0, y_0) στα οποία η f έχει τιμές μικρότερες από την τιμή στο (x_0, y_0), και σημεία (x, y) όσο κοντά θέλουμε στο (x_0, y_0) στα οποία η f έχει τιμές μεγαλύτερες από την τιμή στο (x_0, y_0).
Επιστρέφουμε στην ανισότητα, την οποία είπαμε ότι θέλουμε να εξετάσουμε. Αυτή ισοδυναμεί με

$$(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2} \leq e^{-1}$$

κι αυτή με

$$x^2 + y^2 \leq e^{x^2+y^2-1}.$$

Τώρα έχουμε την ιδέα να γράψουμε $t = x^2 + y^2 - 1$, οπότε η ανισότητα παίρνει την απλούστερη μορφή

$$t + 1 \leq e^t.$$

Γνωρίζουμε, όμως, από τον Απειροστικό Λογισμό Ι, ότι αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε t. (Αν δεν την θυμάστε, αποδείξτε την με την πρώτη παράγωγο.) Άρα και η αρχική μας ανισότητα ισχύει για κάθε (x, y), οπότε συμπεραίνουμε ότι το (x_0, y_0) είναι σημείο (ολικού) μεγίστου της f.

Μία άλλη μέθοδος για την εύρεση των ακροτάτων πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής είναι η χρήση του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής: *αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα I, τότε η f έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο I.* Αυτό το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη σημείων ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου της f στο I, οπότε βρίσκουμε τα υποψήφια σημεία ακροτάτου τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του I (χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, το κριτήριο πρώτης παραγώγου) και συγκρίνουμε τις τιμές της f σ' αυτά τα εσωτερικά σημεία με τις τιμές της στα συνοριακά σημεία του I (δηλαδή στα άκρα του).

Ένα ανάλογο θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής ισχύει και για πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής. *Έστω $f : K \to \mathbb{R}$, όπου το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε η f έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο K. Δηλαδή, υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ για τα οποία ισχύει $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2)$ για κάθε $\mathbf{x} \in K$.*

Το θεώρημα αυτό δεν θα το αποδείξουμε. Θυμόμαστε, μόνο, ότι το να είναι το K κλειστό σημαίνει ότι περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.

Παράδειγμα 3.6. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ στον κλειστό δίσκο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1:

$$f : K \to \mathbb{R}, \quad K = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Το σύνολο K είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα η f έχει *οπωσδήποτε* μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο K. Θα βρούμε τα πιθανά σημεία (ολικού) ακροτάτου στο εσωτερικό του K, και κατόπιν θα βρούμε τα πιθανά σημεία (ολικού) ακροτάτου στο σύνορο του K και, τέλος, θα συγκρίνουμε τις τιμές της f στα διάφορα αυτά σημεία.
Το εσωτερικό του K είναι ο ανοικτός δίσκος $U = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$, ενώ το σύνορο του K είναι ο κύκλος $T = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.
Κάθε υποψήφιο σημείο ακροτάτου στον ανοικτό δίσκο U είναι εσωτερικό σημείο του K και, επίσης, η f έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y$ σε κάθε σημείο του U. Άρα, αν το (x,y) είναι σημείο ακροτάτου της f στο U, τότε πρέπει να ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}.$$

Άρα το μοναδικό υποψήφιο σημείο ακροτάτου της f στο U είναι το $(0,0)$.
Τώρα θα εξετάσουμε την f στο σύνορο του K, δηλαδή στον μοναδιαίο κύκλο T. Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο μία γενικότερη μέθοδο (την μέθοδο των *πολλαπλασιαστών Lagrange*) για να χειριζόμαστε τέτοιου είδους προβλήματα. Αλλά μπορούμε και τώρα να λύσουμε το πρόβλημα. Έχουμε δύο τρόπους.
Α. Περιοριζόμαστε, λοιπόν, στα σημεία (x,y) τα οποία ικανοποιούν την $x^2 + y^2 = 1$ και τότε ο τύπος της f απλοποιείται: όταν $x^2 + y^2 = 1$ είναι

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 = x^2 + 3(1 - x^2) = 3 - 2x^2.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι από την $x^2 + y^2 = 1$ συνεπάγεται $0 \leq x^2 \leq 1$ οπότε, αναλόγως, $1 \leq 3 - 2x^2 \leq 3$ και άρα

$$1 \leq f(x,y) \leq 3.$$

Άρα στον κύκλο T οι τιμές της f βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές 1 και 3. Δηλαδή οι τιμές 1 και 3 είναι η ελάχιστη τιμή και η μέγιστη τιμή της f στον κύκλο T. Η τιμή 1 πιάνεται όταν $x^2 = 1$,

δηλαδή όταν $x = \pm 1$, δηλαδή στα σημεία $(\pm 1, 0)$ του κύκλου T. Η τιμή 3 πιάνεται όταν $x^2 = 0$, δηλαδή όταν $x = 0$, δηλαδή στα σημεία $(0, \pm 1)$ του κύκλου T.
Β. Μία άλλη μέθοδος (η οποία είναι χρήσιμη και σε άλλες τέτοιες περιπτώσεις) είναι να περιγράψουμε τα σημεία του T χρησιμοποιώντας *μόνο μία* μεταβλητή αντί των δύο μεταβλητών x, y. Αυτό είναι εύκολο: θυμόμαστε ότι μία παραμετρικοποίηση των σημείων του κύκλου T είναι η

$$x = \cos t, \;\; y = \sin t \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, οι τιμές $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ για $x^2 + y^2 = 1$ γράφονται, ισοδύναμα,

$$h(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 3\sin^2 t = 1 + 2\sin^2 t \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Τώρα, είναι

$$h'(t) = 4 \sin t \cos t,$$

οπότε η h' μηδενίζεται στα σημεία $2k\pi$, $\pi/2 + 2k\pi$, $\pi + 2k\pi$, $3\pi/2 + 2k\pi$ του $\mathbb{R}$, όπου το k διατρέχει το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Οι τιμές της h στα σημεία αυτά είναι:

$$h(2k\pi) = 1, \quad h\big(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\big) = 3, \quad h(\pi + 2k\pi) = 1, \quad h\big(\tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\big) = 3.$$

Τα σημεία $2k\pi$ και $\pi + 2k\pi$ του $\mathbb{R}$ αντιστοιχούν στα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$ του T, και τα σημεία $\pi/2 + 2k\pi$ και $3\pi/2 + 2k\pi$ του $\mathbb{R}$ αντιστοιχούν στα σημεία $(0, 1)$ και $(0, -1)$ του T. Άρα τα μοναδικά υποψήφια σημεία ακροτάτου της f στο T είναι τα σημεία $(\pm 1, 0)$ και $(0, \pm 1)$.
Τα ίδια τέσσερα σημεία βρήκαμε και με τον τρόπο **Α**.
Τώρα συγκεντρώνουμε όλα τα πέντε πιθανά σημεία ακροτάτου της f στο K, και συγκρίνουμε τις τιμές της f σε αυτά:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(\pm 1, 0) = 1, \quad f(0, \pm 1) = 3.$$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή και η μέγιστη τιμή της f στο K είναι:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, \pm 1) = 3.$$

3.2 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου.

Μία ακόμη μέθοδος εύρεσης τοπικών ακροτάτων πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής βασίζεται στο λεγόμενο *κριτήριο δεύτερης παραγώγου*: αν μία πραγματική συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα I του $\mathbb{R}$ και αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του I ισχύει $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > (<) 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου (μεγίστου) της f. Μάλιστα, στην περίπτωση αυτή το x_0 είναι σημείο *γνήσιου* τοπικού ακροτάτου: για κάθε x αρκούντως κοντά στο x_0 και $\neq x_0$ ισχύει $f(x) > (<) f(x_0)$.

Θα αναπτύξουμε ένα ανάλογο κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θυμόμαστε τα σχετικά με τετραγωνικές μορφές, Εσσιανούς πίνακες και Εσσιανές τετραγωνικές μορφές τα οποία είχαμε αναπτύξει όταν συζητήσαμε για το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης.

Ορισμός 3.2. *Λέμε ότι η συμμετρική τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι* **θετικά (αρνητικά) ορισμένη** *και ότι ο αντίστοιχος συμμετρικός $n \times n$ πίνακας A είναι* **θετικά (αρνητικά) ορισμένος**, *αν ισχύει*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > (<) 0 \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \;\; \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Προφανώς, για $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχουμε $Q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^\top A \mathbf{0} = 0$.

Παράδειγμα 3.7. Η τετραγωνική μορφή $Q(x, y) = x^2 + 4y^2$ είναι θετικά ορισμένη, αφού έχει μη-αρνητικές τιμές, και μηδενίζεται μόνο για $(x, y) = (0, 0)$.

Παράδειγμα 3.8. Η τετραγωνική μορφή $Q(x,y) = x^2 - xy + y^2$ είναι θετικά ορισμένη. Πράγματι, ισχύει

$$Q(x,y) = x^2 - xy + y^2 = \left(x - \tfrac{y}{2}\right)^2 + \tfrac{3y^2}{4} \geq 0$$

για κάθε (x,y), και $Q(x,y) = 0$ μόνο για $(x,y) = (0,0)$.

Παράδειγμα 3.9. Η τετραγωνική μορφή $Q(x,y) = x^2 - y^2$ δεν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη. Πράγματι, ισχύει $Q(1,0) = 1 > 0$ και $Q(0,1) = -1 < 0$.

Παράδειγμα 3.10. Η τετραγωνική μορφή $Q(x,y,z) = -x^2 - y^2 - 2z^2$ είναι αρνητικά ορισμένη, αφού έχει μη-θετικές τιμές και μηδενίζεται μόνο για $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Παράδειγμα 3.11. Η τετραγωνική μορφή $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy$ είναι θετικά ορισμένη. Πράγματι, ισχύει

$$Q(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 + 3z^2 = \left(x - \tfrac{y}{2}\right)^2 + \tfrac{3y^2}{4} + 3z^2 \geq 0$$

για κάθε (x,y,z), και $Q(x,y,z) = 0$ μόνο για $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα παρέχει ένα απλό κριτήριο για να είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη μία τετραγωνική μορφή *δύο μεταβλητών*.

Πρόταση 3.1. *Έστω συμμετρικός πίνακας* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ *και* $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ *η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή.*
(i) Η Q *είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν* $ac - b^2 > 0$ *και* $a, c > (<) 0$.
(ii) Η Q *έχει κάποιες ετερόσημες τιμές αν και μόνο αν* $ac - b^2 < 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η παράσταση $ac - b^2$ είναι η ορίζουσα του πίνακα A και ότι, αν $ac - b^2 > 0$, τότε το $a > (<) 0$ είναι ισοδύναμο με το $c > (<) 0$ (αφού $ac > b^2 \geq 0$).
(i) Έστω $ac - b^2 > 0$ και $a, c > 0$. Τότε, με την γνωστή μέθοδο εμφάνισης τελείου τετραγώνου, γράφουμε

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \tfrac{b}{a}\, y\right)^2 + \tfrac{ac-b^2}{a}\, y^2 \tag{3.2}$$

και εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $Q(x,y) \geq 0$ για κάθε (x,y), και ότι $Q(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y = 0$. Άρα η Q είναι θετικά ορισμένη.
Αντιστρόφως, έστω ότι η Q είναι θετικά ορισμένη. Τότε $a = Q(1,0) > 0$. Επίσης, από την (3.2) συνεπάγεται $\frac{ac-b^2}{a} = Q(-\frac{b}{a}, 1) > 0$ και άρα $ac - b^2 > 0$.
Φυσικά, η περίπτωση του αρνητικά ορισμένου πίνακα είναι παρόμοια.
(ii) Έστω $ac - b^2 < 0$.
Αν $a > 0$, τότε από την (3.2) φαίνεται αμέσως ότι $Q(1,0) = a > 0$ και ότι $Q(-\frac{b}{a}, 1) = \frac{ac-b^2}{a} < 0$.
Αν $a < 0$, τότε, ομοίως, $Q(1,0) = a < 0$ και $Q(-\frac{b}{a}, 1) = \frac{ac-b^2}{a} > 0$.
Αν $a = 0$, τότε $b \neq 0$, και βλέπουμε με λίγες πράξεις ότι $Q(-c+1, 2b) > 0$ και $Q(-c-1, 2b) < 0$.
Αντιστρόφως, έστω ότι η Q έχει κάποιες ετερόσημες τιμές. Από το (i) βλέπουμε ότι δεν μπορεί να είναι $ac - b^2 > 0$. Έστω, τώρα, ότι $ac - b^2 = 0$.
Αν $a \neq 0$, τότε από την (3.2) βλέπουμε ότι το $Q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}\, y\right)^2$ δεν μπορεί να έχει ετερόσημες τιμές, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Αν $a = 0$, τότε $b = 0$, οπότε το $Q(x,y) = cy^2$ δεν μπορεί να έχει ετερόσημες τιμές, οπότε πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα $ac - b^2 < 0$. □

Παράδειγμα 3.12. Για τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε $a = 1 > 0$ και $ac - b^2 = 3/4 > 0$, και συμπεραίνουμε ότι είναι θετικά ορισμένος.

Δυστυχώς, η πρόταση 3.1 έχει εφαρμογή μόνο για 2×2 συμμετρικούς πίνακες. Για όσους είναι εξοικειωμένοι με το μέρος της Γραμμική Άλγεβρας το οποίο ασχολείται με τις *ιδιοτιμές πινάκων*, υπάρχει η πρόταση 3.3, στην αμέσως επόμενη ενότητα, η οποία δίνει ένα κριτήριο για να αποφασίζουμε αν ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος ή, ισοδύναμα, αν η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη.

Μία απλή ιδιότητα κάθε τετραγωνικής μορφής $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η ταυτότητα:

$$Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x}) \qquad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Πράγματι, επειδή $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, έχουμε

$$Q(\lambda\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda x_i \lambda x_j = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \lambda^2 Q(\mathbf{x}).$$

Πρόταση 3.2. *Αν η συμμετρική τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένη ή, ισοδύναμα, αν ο αντίστοιχος συμμετρικός $n \times n$ πίνακας A είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένος, τότε υπάρχει κάποιο $c > 0$ ώστε να ισχύει*

$$Q(\mathbf{x}) \geq c\,\|\mathbf{x}\|^2 \;\; (Q(\mathbf{x}) \leq -c\,\|\mathbf{x}\|^2) \quad \textit{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι θετικά ορισμένη.
Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή το σύνολο

$$S_1(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in S_1(\mathbf{0})$ ισχύει $Q(\mathbf{x}) > 0$. Επειδή η Q είναι συνεχής στο $S_1(\mathbf{0})$ και επειδή το $S_1(\mathbf{0})$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής συνεπάγεται ότι η Q έχει ελάχιστη τιμή στο $S_1(\mathbf{0})$. Δηλαδή, υπάρχει $\mathbf{x}_0 \in S_1(\mathbf{0})$ ώστε να ισχύει

$$Q(\mathbf{x}) \geq Q(\mathbf{x}_0) > 0$$

για κάθε $\mathbf{x} \in S_1(\mathbf{0})$. Επομένως, αν ορίσουμε $c = Q(\mathbf{x}_0) > 0$, τότε ισχύει

$$Q(\mathbf{x}) \geq c > 0$$

για κάθε $\mathbf{x} \in S_1(\mathbf{0})$.
Τώρα, παίρνουμε οποιοδήποτε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Τότε το $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\,\mathbf{x}$ έχει μήκος ίσο με 1, δηλαδή $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\,\mathbf{x} \in S_1(\mathbf{0})$, και άρα

$$Q\Big(\tfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}\,\mathbf{x}\Big) \geq c.$$

Από την (3.3) συνεπάγεται

$$\tfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\,Q(\mathbf{x}) = Q\Big(\tfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}\,\mathbf{x}\Big) \geq c$$

από όπου προκύπτει η (3.4).
Η περίπτωση αρνητικά ορισμένης Q είναι παρόμοια. □

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και σημείο $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό του U. Έστω ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ μίας μπάλας με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και θετική ακτίνα. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.*
(i) Αν η Εσσιανή τετραγωνική μορφή $Hf(\mathbf{x}_0)$ είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένη, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο γνήσιου τοπικού ελαχίστου (μεγίστου) της f.
(ii) Αν η Εσσιανή τετραγωνική μορφή $Hf(\mathbf{x}_0)$ έχει θετικές και αρνητικές τιμές, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η $Hf(\mathbf{x}_0)$ είναι θετικά ορισμένη. Από την πρόταση 3.2 συνεπάγεται ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε να ισχύει

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) \geq c\,\|\mathbf{x}\|^2 \quad \text{για κάθε } \mathbf{x}. \tag{3.5}$$

Τώρα θυμόμαστε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της f στο $\mathbf{x}_0$, δηλαδή τις σχέσεις (2.46) και (2.47), στις οποίες γράφουμε $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, και έχουμε ότι

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\,Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}), \tag{3.6}$$

όπου η συνάρτηση $R : U \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \tfrac{R(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0. \tag{3.7}$$

Επειδή $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{h} = 0$, η (3.6) γίνεται

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \tfrac{1}{2}\,Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}). \tag{3.8}$$

Λόγω της (3.7), υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\tfrac{|R(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} < \tfrac{c}{2} \quad \text{για κάθε } \mathbf{h} \text{ με } 0 < \|\mathbf{h}\| < \delta, \tag{3.9}$$

όπου c είναι η σταθερά στην (3.5). Τώρα, συνδυάζοντας τις (3.5), (3.8) και (3.9), βρίσκουμε

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) > f(\mathbf{x}_0) + \tfrac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|^2 - \tfrac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|^2 = f(\mathbf{x}_0) \quad \text{για κάθε } \mathbf{h} \text{ με } 0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$$

ή, ισοδύναμα,

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0) \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \text{ με } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta.$$

Άρα το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο γνήσιου τοπικού ελαχίστου.

(ii) Έστω $Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1) > 0$ και $Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_2) < 0$ δύο ετερόσημες τιμές της Εσσιανής τετραγωνικής μορφής $Hf(\mathbf{x}_0)$.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\mathbf{h}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|}\,\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{h}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_2\|}\,\mathbf{x}_2$, και τότε είναι $\|\mathbf{h}_1\| = \|\mathbf{h}_2\| = 1$.

Θεωρούμε και τους *θετικούς* αριθμούς

$$c_1 = Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_1) = \tfrac{Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_1\|^2} > 0, \quad c_2 = -Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_2) = -\tfrac{Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_2\|^2} > 0,$$

καθώς και τον *θετικό* αριθμό

$$c = \min\{c_1, c_2\}.$$

Τότε, προφανώς,

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_1) \geq c > 0, \quad Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_2) \leq -c < 0.$$

Πάλι, λόγω της (3.7), υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η (3.9) με το c το οποίο έχουμε μόλις τώρα ορίσει.

Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < |t| < \delta$ είναι

$$Hf(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{h}_1) = t^2 Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_1) \geq ct^2$$

και $0 < \|t\mathbf{h}_1\| = |t| < \delta$ και άρα, από την (3.9),

$$|R(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1)| < \tfrac{c}{2}\,\|t\mathbf{h}_1\|^2 = \tfrac{c}{2}\,t^2.$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις με την (3.8) βρίσκουμε

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1) > f(\mathbf{x}_0) + \tfrac{c}{2}\,t^2 - \tfrac{c}{2}\,t^2 = f(\mathbf{x}_0) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R} \text{ με } 0 < |t| < \delta.$$

Άρα όταν $t \to 0$ το σημείο $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1$ πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά στο $\mathbf{x}_0$ και για κάθε τέτοιο σημείο έχουμε $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$.
Ομοίως, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < |t| < \delta$ είναι

$$Hf(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{h}_2) = t^2 Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_2) \leq -ct^2$$

και $0 < \|t\mathbf{h}_2\| = |t| < \delta$ και άρα, από την (3.9),

$$|R(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_2)| < \tfrac{c}{2}\|t\mathbf{h}_2\|^2 = \tfrac{c}{2}t^2.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις με την (3.8) βρίσκουμε

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_2) < f(\mathbf{x}_0) - \tfrac{c}{2}t^2 + \tfrac{c}{2}t^2 = f(\mathbf{x}_0) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R} \text{ με } 0 < |t| < \delta.$$

Άρα όταν $t \to 0$ το σημείο $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_2$ πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά στο $\mathbf{x}_0$ και για κάθε τέτοιο σημείο έχουμε $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$. $\square$

Παράδειγμα 3.13. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = xy + \tfrac{1}{x} + \tfrac{8}{y}.$$

Το πεδίο ορισμού U της f είναι το ανοικτό σύνολο το οποίο αποτελείται από τον $\mathbb{R}^2$ χωρίς τον x-άξονα και τον y-άξονα, δηλαδή στην ένωση των τεσσάρων ανοικτών τεταρτημορίων του xy-επιπέδου. Η f έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \tfrac{1}{x^2}, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \tfrac{8}{y^2}$$

σε κάθε $(x, y) \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό σύνολο, κάθε υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου της f στο U είναι εσωτερικό σημείο του U. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο πρώτης παραγώγου σε κάθε υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου της f στο U. Βάσει, λοιπόν, του κριτηρίου πρώτης παραγώγου, αν το $(x, y) \in U$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε

$$\begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε το $(1/2, 4)$ ως το μοναδικό υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Τώρα, επειδή η f έχει και μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \tfrac{2}{x^3}, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \tfrac{16}{y^3}, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

συνεχείς σε κάθε $(x, y) \in U$, και ειδικά σε κάθε (x, y) το οποίο ανήκει σε κάποιον δίσκο με κέντρο το σημείο $(1/2, 4)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Στο σημείο $(1/2, 4)$ έχουμε

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\tfrac{1}{2}, 4\right) = 16, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\tfrac{1}{2}, 4\right) = \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\tfrac{1}{2}, 4\right) = 1,$$

οπότε ο Εσσιανός πίνακας της f στο $(1/2, 4)$ είναι ο

$$Hf\left(\tfrac{1}{2}, 4\right) = \begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Επειδή $16 > 0$ και $16 \cdot 1/4 - 1^2 = 3 > 0$, σύμφωνα με την πρόταση 3.1, ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος, και άρα το $(1/2, 4)$ είναι σημείο γνήσιου τοπικού ελαχίστου της f.
Εναλλακτικά, για να αποφασίσουμε αν ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος,

χρησιμοποιούμε την πρόταση 3.3, βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα. Από την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 16-\lambda & 1 \\ 1 & 1/4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(16-\lambda)(1/4-\lambda) - 1 = 0.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης, δηλαδή οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα, είναι οι

$$\lambda_1 = \tfrac{65-\sqrt{4033}}{8}, \quad \lambda_2 = \tfrac{65+\sqrt{4033}}{8}.$$

Και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές, οπότε ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

Παράδειγμα 3.14. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \tfrac{1}{x^2y^2}.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η f ορίζεται στο ανοικτό σύνολο U το οποίο αποτελείται από τον $\mathbb{R}^2$ χωρίς τον x-άξονα και τον y-άξονα. Τώρα οι συλλογισμοί μας θα είναι παρόμοιοι με αυτούς στο προηγούμενο παράδειγμα, οπότε θα είμαστε σύντομοι.
Η f έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - \tfrac{2}{x^3y^2}, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - \tfrac{2}{x^2y^3}$$

σε κάθε $(x, y) \in U$, και κάθε $(x, y) \in U$ είναι εσωτερικό σημείο του U. Άρα από το κριτήριο πρώτης παραγώγου συνεπάγεται ότι, αν το $(x, y) \in U$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε

$$\begin{cases} 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0 \\ 2y - \frac{2}{x^2y^3} = 0 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε τα τέσσερα σημεία $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ ως τα μοναδικά υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της f. Επειδή η f έχει και μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + \tfrac{6}{x^4y^2}, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + \tfrac{6}{x^2y^4}, \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \tfrac{4}{x^3y^3}$$

συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, και ειδικότερα στα σημεία τα οποία είναι κοντά στα τέσσερα σημεία τα οποία βρήκαμε, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Και στα τέσσερα σημεία έχουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$. Στα σημεία $(1, 1)$, $(-1, -1)$ έχουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$ ενώ στα σημεία $(1, -1)$, $(-1, 1)$ έχουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$. Άρα στα τέσσερα σημεία οι Εσσιανοί πίνακες της f είναι οι

$$Hf(\pm 1, \pm 1) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad Hf(\pm 1, \mp 1) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Επειδή $8 > 0$ και $8^2 - (\pm 4)^2 = 48 > 0$, η πρόταση 3.1 λέει ότι ο Εσσιανός πίνακας είναι και στις δύο περιπτώσεις θετικά ορισμένος και άρα και τα τέσσερα σημεία είναι σημεία γνήσιου τοπικού ελαχίστου της f.
Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε την πρόταση 3.3, βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα. Οι ιδιοτιμές του πρώτου Εσσιανού πίνακα είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Αυτή είναι ισοδύναμη με την
$$(8-\lambda)^2 - 16 = 0.$$
Οι λύσεις της εξίσωσης, δηλαδή οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα, είναι οι
$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 12.$$
Και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές, οπότε ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Τις ίδιες ιδιοτιμές έχει και ο δεύτερος Εσσιανός πίνακας, οπότε κι αυτός είναι θετικά ορισμένος.

Παράδειγμα 3.15. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x,y) = 5xy + 2\cos(x+y).$$
Η f έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5y - 2\sin(x+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5x - 2\sin(x+y)$$
σε κάθε (x,y), και κάθε (x,y) είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^2$. Άρα από το κριτήριο πρώτης παραγώγου συνεπάγεται ότι, αν το (x,y) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε
$$\begin{cases} 5y - 2\sin(x+y) = 0 \\ 5x - 2\sin(x+y) = 0 \end{cases}$$
Το σύστημα αυτό γράφεται με τις ισοδύναμες μορφές
$$\begin{cases} y = x \\ 5x = 2\sin(x+y) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ 5x = 2\sin(2x) \end{cases}$$
Γνωρίζουμε ότι $\sin t < t$ για κάθε $t > 0$, και ότι $\sin t > t$ για κάθε $t < 0$. Άρα, αν $x > 0$, τότε $2\sin(2x) < 4x < 5x$, και, αν $x < 0$, τότε $2\sin(2x) > 4x > 5x$. Επομένως, η μοναδική λύση της δεύτερης εξίσωσης του τελευταίου συστήματος είναι η $x = 0$, και άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $x = y = 0$. Άρα το μοναδικό υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι το $(0,0)$. Επειδή η f έχει και μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2\cos(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2\cos(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 5 - 2\cos(x+y)$$
συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, και ειδικότερα στο σημείο $(0,0)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Έχουμε
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 3.$$
Άρα ο Εσσιανός πίνακας της f στο $(0,0)$ είναι ο
$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$
Επειδή $(-2)^2 - 3^2 = -5 < 0$, η πρόταση 3.1 λέει ότι η Εσσιανή τετραγωνική μορφή έχει θετικές και αρνητικές τιμές και άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.
Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε την πρόταση 3.3, βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα. Οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα είναι οι λύσεις της εξίσωσης:
$$\det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0.$$
Αυτή είναι ισοδύναμη με την
$$(-2-\lambda)^2 - 9 = 0.$$
Οι λύσεις της εξίσωσης, δηλαδή οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα, είναι οι
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -5.$$
Άρα η Εσσιανή τετραγωνική μορφή έχει θετικές και αρνητικές τιμές.

Παράδειγμα 3.16. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = 2x + y - z + x^2 + y^2 + 4z^2 - 2yz.$$

Η f έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2 + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 1 + 2y - 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -1 + 8z - 2y$$

σε κάθε (x, y, z), και κάθε (x, y, z) είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^3$. Άρα από το κριτήριο πρώτης παραγώγου συνεπάγεται ότι, αν το (x, y, z) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε

$$\begin{cases} 2 + 2x = 0 \\ 1 + 2y - 2z = 0 \\ -1 + 8z - 2y = 0 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε το σημείο $(-1, -\frac{1}{2}, 0)$ ως το μοναδικό υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Η f έχει και συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -2$$

σε κάθε (x, y, z). Ειδικώτερα,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = -2.$$

Άρα ο Εσσιανός πίνακας της f στο σημείο $(-1, -\frac{1}{2}, 0)$ είναι ο

$$Hf(-1, -\tfrac{1}{2}, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -\frac{1}{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -\frac{1}{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(-1, -\frac{1}{2}, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, -\frac{1}{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -\frac{1}{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1, -\frac{1}{2}, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(-1, -\frac{1}{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(-1, -\frac{1}{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(-1, -\frac{1}{2}, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

και η Εσσιανή τετραγωνική μορφή της f στο σημείο $(-1, -\frac{1}{2}, 0)$ είναι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} Hf(-1, -\tfrac{1}{2}, 0)(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0)y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0)z^2 \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0)xy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0)xz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1, -\tfrac{1}{2}, 0)yz \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 4yz. \end{aligned}$$

Επειδή ο Εσσιανός πίνακας δεν είναι 2×2 πίνακας, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.1. Μπορούμε, όμως, με την μέθοδο εμφάνισης τέλειου τετραγώνου, να γράψουμε την Εσσιανή τετραγωνική μορφή ως

$$Hf(-1, -\tfrac{1}{2}, 0)(x, y, z) = 2x^2 + 2(y - z)^2 + 6z^2$$

και αμέσως βλέπουμε ότι η τιμή της σε κάθε $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ είναι > 0. Άρα η Εσσιανή τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη, οπότε το σημείο $(-1, -\frac{1}{2}, 0)$ είναι σημείο γνήσιου τοπικού ελαχίστου της f.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε την πρόταση 3.3, βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα, οι οποίες είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(2-\lambda)\big((2-\lambda)(8-\lambda)-4\big) = 0.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης, δηλαδή οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα, είναι οι

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5-\sqrt{13}, \quad \lambda_3 = 5+\sqrt{13}.$$

Όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, οπότε ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

3.3 Ιδιοτιμές πινάκων.

Θα δούμε μία σημαντική εφαρμογή των προηγουμένων στην Γραμμική Άλγεβρα, και κατόπιν θα δούμε εφαρμογή της εφαρμογής στα προηγούμενα.

Ορισμός 3.3. *Έστω $n\times n$ πίνακας A. Λέμε ότι ο αριθμός λ είναι* **ιδιοτιμή** *του A, αν υπάρχει $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, ώστε $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$.*
Αν το λ είναι ιδιοτιμή του A, τότε κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ για το οποίο ισχύει $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** *του A σε σχέση με την ιδιοτιμή λ.*

Ορισμός 3.4. *Έστω $n\times n$ συμμετρικός πίνακας A και γραμμικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι ο V είναι* **αναλλοίωτος** *από τον A, αν ισχύει $A\mathbf{x}\in V$ για κάθε $\mathbf{x}\in V$.*

Λήμμα 3.1. *Έστω $n\times n$ συμμετρικός πίνακας A και γραμμικός υπόχωρος $V\neq\{\mathbf{0}\}$ του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος είναι αναλλοίωτος από τον A. Τότε υπάρχει ιδιοτιμή λ του A και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}$ ώστε $\mathbf{v}\in V$ και $\|\mathbf{v}\|=1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα του V, δηλαδή το σύνολο $K=\{\mathbf{x}\in V \mid \|\mathbf{x}\|=1\}$. Το σύνολο K είναι κλειστό και φραγμένο και η τετραγωνική μορφή $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$$

είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$. Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής συνεπάγεται ότι η Q έχει μέγιστη τιμή στο K. Δηλαδή υπάρχει $\mathbf{v}\in K$ ώστε $Q(\mathbf{x})\leq Q(\mathbf{v})$ για κάθε $\mathbf{x}\in K$ ή, ισοδύναμα,

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \leq \mathbf{v}^\top A\mathbf{v} \quad \text{για κάθε } \mathbf{x}\in K.$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε $\mathbf{u}\in V$ τέτοιο ώστε $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}^\top\mathbf{v}=0$ και οποιονδήποτε αριθμό t. Τότε $\mathbf{v}+t\mathbf{u}\in V$ και $\mathbf{v}+t\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, οπότε $\frac{\mathbf{v}+t\mathbf{u}}{\|\mathbf{v}+t\mathbf{u}\|}\in K$. Άρα

$$\tfrac{(\mathbf{v}+t\mathbf{u})^\top A(\mathbf{v}+t\mathbf{u})}{\|\mathbf{v}+t\mathbf{u}\|^2} \leq \mathbf{v}^\top A\mathbf{v}.$$

Συνεπάγεται

$$(\mathbf{v}+t\mathbf{u})^\top A(\mathbf{v}+t\mathbf{u}) \leq (\mathbf{v}^\top A\mathbf{v})\|\mathbf{v}+t\mathbf{u}\|$$

ή, ισοδύναμα,

$$\mathbf{v}^\top A\mathbf{v} + t\mathbf{v}^\top A\mathbf{u} + t\mathbf{u}^\top A\mathbf{v} + t^2\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} \leq (\mathbf{v}^\top A\mathbf{v})(\|\mathbf{v}\|^2 + 2t\mathbf{u}^\top\mathbf{v} + t^2\|\mathbf{u}\|^2).$$

Επειδή ο A είναι συμμετρικός πίνακας, ισχύει $\mathbf{v}^\top A\mathbf{u} = \mathbf{u}^\top A\mathbf{v}$. Επίσης, είναι $\|\mathbf{v}\| = 1$ και $\mathbf{u}^\top \mathbf{v} = 0$. Άρα από την τελευταία ισότητα βρίσκουμε

$$\mathbf{v}^\top A\mathbf{v} + 2t\mathbf{u}^\top A\mathbf{v} + t^2\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} \leq \mathbf{v}^\top A\mathbf{v} + t^2(\mathbf{v}^\top A\mathbf{v})\|\mathbf{u}\|^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$2t\mathbf{u}^\top A\mathbf{v} + t^2\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} \leq t^2(\mathbf{v}^\top A\mathbf{v})\|\mathbf{u}\|^2.$$

Αυτό ισχύει για κάθε αριθμό t.
Θεωρώντας $t > 0$, βρίσκουμε

$$2\mathbf{u}^\top A\mathbf{v} + t\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} \leq t(\mathbf{v}^\top A\mathbf{v})\|\mathbf{u}\|^2,$$

οπότε, με $t \to 0+$ βρίσκουμε $\mathbf{u}^\top A\mathbf{v} \leq 0$.
Ομοίως, θεωρώντας $t < 0$, βρίσκουμε

$$2\mathbf{u}^\top A\mathbf{v} + t\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} \geq t(\mathbf{v}^\top A\mathbf{v})\|\mathbf{u}\|^2,$$

οπότε, με $t \to 0-$ βρίσκουμε $\mathbf{u}^\top A\mathbf{v} \geq 0$.
Άρα

$$\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^\top A\mathbf{v} = 0.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\mathbf{u} \in V$ τέτοιο ώστε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = 0$. Με άλλα λόγια, κάθε διάνυσμα στον V το οποίο είναι κάθετο στο $\mathbf{v}$ είναι κάθετο και στο $A\mathbf{v}$. Επειδή ο V είναι αναλλοίωτος από τον A και άρα $A\mathbf{v} \in V$, συνεπάγεται ότι το $A\mathbf{v}$ είναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{v}$, δηλαδή ότι

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

για κάποιον αριθμό λ. Επομένως, το λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}$ ώστε $\mathbf{v} \in V$ και $\|\mathbf{v}\| = 1$. □

Θεώρημα 3.1. *Έστω $n \times n$ συμμετρικός πίνακας A. Τότε υπάρχουν ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του A και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ τα οποία αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το λήμμα 3.1 στον $V_1 = \mathbb{R}^n$ και βλέπουμε ότι υπάρχει ιδιοτιμή λ_1 του A και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_1$ ώστε $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ και $\|\mathbf{x}_1\| = 1$.
Τώρα θεωρούμε τον υπόχωρο V_2 του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος είναι κάθετος στο διάνυσμα $\mathbf{x}_1$, δηλαδή

$$V_2 = \{\mathbf{v} \,|\, \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_1 = 0\}.$$

Λόγω συμμετρίας του A, για κάθε $\mathbf{v} \in V_2$ έχουμε

$$(A\mathbf{v})^\top \mathbf{x}_1 = \mathbf{v}^\top A^\top \mathbf{x}_1 = \mathbf{v}^\top A\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}^\top(\lambda_1\mathbf{x}_1) = \lambda_1\mathbf{v}^\top \mathbf{x}_1 = 0.$$

Άρα $A\mathbf{v} \in V_2$ και επομένως ο υπόχωρος V_2 είναι αναλλοίωτος από τον πίνακα A.
Τώρα, εφαρμόζουμε το λήμμα 3.1 στον V_2 και βλέπουμε ότι υπάρχει ιδιοτιμή λ_2 του A και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_2$ ώστε $\mathbf{x}_2 \in V_2$ και $\|\mathbf{x}_2\| = 1$. Ειδικώτερα, τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ είναι κάθετα.
Τώρα θεωρούμε τον υπόχωρο V_3 του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος είναι κάθετος στα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, δηλαδή

$$V_3 = \{\mathbf{v} \,|\, \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_1 = 0, \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_2 = 0\}.$$

Ακριβώς όπως πριν αποδεικνύουμε ότι ο V_3 είναι αναλλοίωτος από τον πίνακα A και, κατόπιν, εφαρμόζουμε το λήμμα 3.1 στον V_3 και βλέπουμε ότι υπάρχει ιδιοτιμή λ_3 του A και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_3$ ώστε $\mathbf{x}_3 \in V_3$ και $\|\mathbf{x}_3\| = 1$. Ειδικώτερα, τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι ανά δύο κάθετα.
Συνεχίζοντας επαγωγικά, κάποια στιγμή θα έχουμε βρει ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του A και αντίστοιχα

ιδιοδιανύσματα $x_1, \dots, x_n$ τα οποία έχουν όλα μήκη ίσα με 1 και τα οποία είναι ανά δύο κάθετα, δηλαδή το σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ορθοκανονικό. Αν υποθέσουμε ότι κάποιος γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_n$ είναι ίσος με $\mathbf{0}$, δηλαδή

$$t_1\mathbf{x}_1 + \cdots + t_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

τότε, υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο μερών αυτής της ισότητας με κάθε $\mathbf{x}_i$, βρίσκουμε ότι $t_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Άρα το $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ (και άρα δεν μπορούμε να συνεχίσουμε την επαγωγική διαδικασία). □

Ας επισημανθεί ότι κάποιες από τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ του συμμετρικού $n \times n$ πίνακα A μπορεί να επαναλαμβάνονται.

Πρόταση 3.3. *Έστω συμμετρικός $n \times n$ πίνακας A, και $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η αντίστοιχη συμμετρική τετραγωνική μορφή.*
(i) Η Q είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές (αρνητικές).
(ii) Η Q έχει θετικές και αρνητικές τιμές αν και μόνο αν ο A έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Έστω $x_1, \dots, x_n$ τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ του A, σύμφωνα με το θεώρημα 3.1. Τα διανύσματα αυτά έχουν μήκος ίσο με 1 και είναι ανά δύο κάθετα.
(i) Έστω ότι η Q είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή ότι $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ ισχύει

$$0 < \mathbf{x}_i^\top A\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^\top(\lambda_i\mathbf{x}_i) = \lambda_i\|\mathbf{x}_i\|^2 = \lambda_i.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Θεωρούμε τυχόν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και τότε υπάρχουν $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με μηδέν ώστε

$$\mathbf{x} = \textstyle\sum_{i=1}^n t_i\mathbf{x}_i.$$

Τότε

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} &= \big(\textstyle\sum_{j=1}^n t_j\mathbf{x}_j\big)^\top\big(\textstyle\sum_{i=1}^n t_iA\mathbf{x}_i\big) = \big(\textstyle\sum_{j=1}^n t_j\mathbf{x}_j^\top\big)\big(\textstyle\sum_{i=1}^n t_i\lambda_i\mathbf{x}_i\big) \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^n \lambda_it_it_j\mathbf{x}_j^\top\mathbf{x}_i = \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_it_i^2 > 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Άρα η Q είναι θετικά ορισμένη.
(ii) Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, τότε από την (3.10) συνεπάγεται $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ για κάθε $\mathbf{x}$. Ομοίως, αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$, τότε από την (3.10) συνεπάγεται $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ για κάθε $\mathbf{x}$. Επομένως, αν η Q έχει ετερόσημες τιμές, τότε κάποιες από τις $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι ετερόσημες.
Τώρα, έστω $\lambda \neq 0$ οποιαδήποτε ιδιοτιμή του A. Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα του A σε σχέση με την λ, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$Q(t\mathbf{x}) = t^2Q(\mathbf{x}) = t^2\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = t^2\mathbf{x}^\top(\lambda\mathbf{x}) = t^2\lambda\|\mathbf{x}\|^2.$$

Επομένως, σε κάθε σημείο $\neq \mathbf{0}$ της ευθείας $\{t\mathbf{x} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ οι τιμές της Q είναι θετικές, αν $\lambda > 0$, και αρνητικές, αν $\lambda < 0$. □

Παράδειγμα 3.17. Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής $x^2 + 4y^2$ είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ και έχει τις ιδιοτιμές 1 και 4. Άρα η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη.

Παράδειγμα 3.18. Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής $x^2 - xy + y^2$ είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ και έχει τις ιδιοτιμές $1/2$ και $3/2$. Άρα η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη.

Παράδειγμα 3.19. Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής $x^2-4xy+y^2$ είναι ο $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ και έχει τις ιδιοτιμές 3 και -1. Άρα η τετραγωνική μορφή έχει θετικές και αρνητικές τιμές.

Παράδειγμα 3.20. Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής $-x^2-y^2-2z^2$ είναι ο $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ και έχει τις ιδιοτιμές -1, -1 και -2. Άρα η τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ορισμένη.

Παράδειγμα 3.21. Ο πίνακας της τετρ. μορφής $x^2+3y^2+2z^2-6yz$ είναι ο $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 2\end{bmatrix}$ και έχει τις ιδιοτιμές 1, $\frac{5+\sqrt{37}}{2}$ και $\frac{5-\sqrt{37}}{2}$. Άρα η τετραγωνική μορφή έχει θετικές και αρνητικές τιμές.

Μπορούμε να αποδείξουμε με δεύτερο τρόπο την πρόταση 3.2. Πράγματι, έστω ότι ο συμμετρικός $n\times n$ πίνακας A είναι θετικά ορισμένος. Θεωρούμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ του A και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x_1,\ldots,x_n$ τα οποία αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.3, ισχύει $\lambda_1,\ldots,\lambda_n>0$.
Για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ υπάρχουν αριθμοί $t_1,\ldots,t_n$ ώστε

$$\mathbf{x}=\textstyle\sum_{i=1}^n t_i\mathbf{x}_i.$$

Τότε

$$\|\mathbf{x}\|^2=\mathbf{x}^\top\mathbf{x}=\big(\textstyle\sum_{i=1}^n t_i\mathbf{x}_i^\top\big)\big(\sum_{j=1}^n t_j\mathbf{x}_j\big)=\sum_{i,j=1}^n t_it_j\mathbf{x}_i^\top\mathbf{x}_j=\sum_{i=1}^n t_i^2.$$

Τώρα ορίζουμε

$$c=\min\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}>0,$$

και, επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό (3.10) έχουμε ότι

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}=\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i t_i^2\geq c\sum_{i=1}^n t_i^2=c\|\mathbf{x}\|^2.$$

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

4.1 Επίλυση μίας εξίσωσης ως προς μία μεταβλητή.

Για να κατανοήσουμε ευκολότερα όσα θα ακολουθήσουν, ας δούμε προσεκτικά δύο πολύ απλά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.1. Θεωρούμε την *γραμμική εξίσωση*

$$ax + by = c.$$

Αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση ως προς y, μεταφέρουμε το ax στην δεξιά μεριά, και μετά διαιρούμε με το b:

$$y = -\tfrac{a}{b}\,x + \tfrac{c}{b}.$$

Έτσι προκύπτει το y ως συνάρτηση του x. Φυσικά, αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν $b \neq 0$, όπου b είναι ο συντελεστής του y.
Ομοίως, αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση ως προς x, μεταφέρουμε το by στην δεξιά μεριά, και μετά διαιρούμε με το a:

$$x = -\tfrac{b}{a}\,y + \tfrac{c}{a}.$$

Έτσι προκύπτει το x ως συνάρτηση του y. Φυσικά, αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν $a \neq 0$, όπου a είναι ο συντελεστής του x.
Τώρα προσέξτε. Η εξίσωση $ax + by = c$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$F(x, y) = c,$$

όπου $F(x, y) = ax + by$ είναι συγκεκριμένη συνάρτηση δύο μεταβλητών: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Το ότι τα x, y ικανοποιούν την εξίσωση $F(x, y) = c$ σημαίνει ότι το (x, y) ανήκει στο ισοσταθμικό σύνολο

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, F(x, y) = c\}$$

της F, το οποίο στην συγεκριμένη περίπτωση (δηλαδή όταν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$) είναι μία ευθεία στο xy-επίπεδο.
Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής a του x στην εξίσωση είναι η μερική παράγωγος της F ως προς x και ότι ο συντελεστής b του y στην εξίσωση είναι η μερική παράγωγος της F ως προς y:

$$\tfrac{\partial F}{\partial x} = a, \quad \tfrac{\partial F}{\partial y} = b.$$

Επομένως, βάσει όσων είπαμε πιο πριν, αν $\frac{\partial F}{\partial y} = b \neq 0$, τότε η εξίσωση $F(x, y) = c$ μπορεί να λυθεί ως προς y, δηλαδή να γραφτεί το y ως συνάρτηση του x,

$$y = f(x) = -\tfrac{a}{b}\,x + \tfrac{c}{b},$$

όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι το $F(x, y) = c$ ισοδυναμεί με το $y = f(x)$, δηλαδή ότι το ισοσταθμικό σύνολο της F είναι το γράφημα της f:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, F(x, y) = c\} = \{(x, f(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Με άλλα λόγια, την ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $ax + by = c$ μπορούμε να την δούμε ως ισοσταθμικό σύνολο της F *και* ως γράφημα της f.
Ομοίως, αν $\frac{\partial F}{\partial x} = a \neq 0$, τότε η εξίσωση $F(x, y) = c$ μπορεί να λυθεί ως προς x, δηλαδή να γραφτεί το x ως συνάρτηση του y,

$$x = g(y) = -\tfrac{b}{a}\, y + \tfrac{c}{a},$$

όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι το $F(x, y) = c$ ισοδυναμεί με το $x = g(y)$, δηλαδή ότι το ισοσταθμικό σύνολο της F είναι το γράφημα της g:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, F(x, y) = c\} = \{(g(y), y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Με άλλα λόγια, την ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $ax + by = c$ μπορούμε να την δούμε ως ισοσταθμικό σύνολο της F *και* ως γράφημα της g.

Παράδειγμα 4.2. Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο K στο xy-επίπεδο, δηλαδή το σύνολο των σημείων (x, y) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y) = x^2 + y^2$, και τότε ο κύκλος K είναι ένα συγκεκριμένο ισοσταθμικό σύνολο της F:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, F(x, y) = 1\}.$$

Ερώτηση. Μπορούμε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ ως προς y, δηλαδή να γράψουμε το y ως συνάρτηση $y = f(x)$, ή, ισοδύναμα, μπορεί ο κύκλος K να είναι το γράφημα κάποιας συνάρτησης $y = f(x)$;
Υπάρχει και η συμμετρική *ερώτηση*. Μπορεί η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ να λυθεί ως προς x, δηλαδή να γραφτεί το x ως συνάρτηση $x = g(y)$, ή, ισοδύναμα, μπορεί ο κύκλος K να είναι το γράφημα κάποιας συνάρτησης $x = g(y)$;
Τώρα η κατάσταση είναι λίγο πιο περίπλοκη από αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος.
Αν ο κύκλος K είναι γράφημα κάποιας συνάρτησης $y = f(x)$, τότε το πεδίο ορισμού της f πρέπει να είναι η προβολή του K στον x-άξονα, δηλαδή το διάστημα $[-1, 1]$ του x-άξονα. Όμως, επειδή υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες οι οποίες τέμνουν τον κύκλο σε δύο σημεία η καθεμία, δεν μπορεί να υπάρχει συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε το γράφημα της f να είναι ο κύκλος K. Με εντελώς όμοιο τρόπο βλέπουμε ότι, επειδή υπάρχουν οριζόντιες ευθείες οι οποίες τέμνουν τον κύκλο K σε δύο σημεία η καθεμία, ο κύκλος K δεν μπορεί να είναι γράφημα κάποιας συνάρτησης $x = g(y)$.
Αυτό, όμως, το "πρόβλημα" δεν υφίσταται αν πάρουμε κατάλληλα *μέρη* του κύκλου K. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε ένα κατάλληλο μέρος L του κύκλου K, τότε μπορεί το L να είναι γράφημα κάποιας συνάρτηση $y = f(x)$ ή κάποιας συνάρτησης $x = g(y)$.
Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ως L το άνω ημικύκλιο του κύκλου K, τότε το L είναι το γράφημα της συνάρτησης $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ομοίως, αν θεωρήσουμε ως L το κάτω ημικύκλιο του κύκλου K, τότε το L είναι το γράφημα της συνάρτησης $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$y = f(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Προσέξτε ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, αν θεωρήσουμε ως L ένα οποιοδήποτε τόξο του κύκλου K το οποίο περιέχει ως "εσωτερικό" του σημείο είτε το σημείο $(-1,0)$ είτε το σημείο $(1,0)$. Ο λόγος είναι, και πάλι, ότι υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες οι οποίες τέμνουν ένα τέτοιο τόξο L σε δύο σημεία η καθεμία.
Συμμετρικά, αν θεωρήσουμε ως L το δεξιό ημικύκλιο του κύκλου K, τότε το L είναι το γράφημα της συνάρτησης $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$x=g(y)=\sqrt{1-y^2}.$$

Και, αν θεωρήσουμε ως L το αριστερό ημικύκλιο του κύκλου K, τότε το L είναι το γράφημα της συνάρτησης $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$x=g(y)=-\sqrt{1-y^2}.$$

Και πάλι, κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, αν θεωρήσουμε ως L ένα οποιοδήποτε τόξο του κύκλου K το οποίο περιέχει ως "εσωτερικό" του σημείο είτε το σημείο $(0,-1)$ είτε το σημείο $(0,1)$. Ο λόγος είναι ότι υπάρχουν οριζόντιες ευθείες οι οποίες τέμνουν ένα τέτοιο τόξο L σε δύο σημεία η καθεμία.
Τώρα, παρατηρούμε ότι για την συγκεκριμένη συνάρτηση $F(x,y)=x^2+y^2$, της οποίας ο κύκλος K είναι ισοσταθμικό σύνολο, ισχύει

$$\nabla F(x,y)=\big(\tfrac{\partial F}{\partial x}(x,y),\tfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\big)=(2x,2y).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι τα τόξα L του K τα οποία *δεν είναι* γραφήματα συναρτήσεων $y=f(x)$ είναι εκείνα τα οποία περιέχουν ως "εσωτερικό" τους σημείο είτε το σημείο $(-1,0)$ είτε το σημείο $(1,0)$, και ότι τα δύο αυτά σημεία είναι ακριβώς εκείνα τα σημεία (x,y) του K στα οποία ισχύει $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$. Ομοίως, βλέπουμε ότι τα τόξα L του K τα οποία *δεν είναι* γραφήματα συναρτήσεων $x=g(y)$ είναι εκείνα τα οποία περιέχουν ως "εσωτερικό" τους σημείο είτε το σημείο $(0,-1)$ είτε το σημείο $(0,1)$, και ότι τα δύο αυτά σημεία είναι ακριβώς εκείνα τα σημεία (x,y) του K στα οποία ισχύει $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0$.
Να το πούμε και διαφορετικά. Τα τόξα L του K τα οποία *είναι* γραφήματα συναρτήσεων $y=f(x)$ είναι εκείνα τα οποία περιέχουν σημεία (x,y) του K στα οποία ισχύει $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$. Ομοίως, τα τόξα L του K τα οποία *είναι* γραφήματα συναρτήσεων $x=g(y)$ είναι εκείνα τα οποία περιέχουν σημεία (x,y) του K στα οποία ισχύει $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\neq 0$.

Τα προηγούμενα ισχύουν γενικότερα. Αν έχουμε ένα ισοσταθμικό σύνολο K κάποιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $F(x,y)$, τότε, με κάποιες ελάχιστες προϋποθέσεις, μπορούμε, απομονώνοντας κατάλληλα μέρη L του K, να δεχτούμε ότι αυτά τα L είναι γραφήματα συναρτήσεων $y=f(x)$ ή συναρτήσεων $x=g(y)$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του εξής θεωρήματος.

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. *Έστω $F:U\to\mathbb{R}$, όπου $U\subseteq\mathbb{R}^2$, έστω εσωτερικό σημείο (x_0,y_0) του U, και έστω*

$$U_c=\{(x,y)\in U\,|\,F(x,y)=c\}$$

ένα ισοσταθμικό σύνολο της F. Υποθέτουμε ότι το (x_0,y_0) ανήκει στο U_c, δηλαδή

$$F(x_0,y_0)=c.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $\frac{\partial F}{\partial x}$ και $\frac{\partial F}{\partial y}$ σε έναν δίσκο με κέντρο το (x_0,y_0), και ότι

$$\nabla F(x_0,y_0)\neq(0,0).$$

Δηλαδή, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ ή $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.
(i) Έστω $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό διάστημα I, το οποίο περιέχει το x_0, και ανοικτό

διάστημα J, το οποίο περιέχει το y_0, ώστε για κάθε $x \in I$ να υπάρχει μοναδικό $y \in J$ ώστε το σημείο (x, y) να ανήκει στο U_c ή, ισοδύναμα, να ισχύει $F(x, y) = c$. Με άλλα λόγια, το μέρος του συνόλου U_c το οποίο περιέχεται στο ανοικτό ορθογώνιο $I \times J$ είναι γράφημα μίας συνάρτησης $f : I \to J$, όπου για κάθε $x \in I$ το $f(x)$ είναι το μοναδικό $y \in J$ για το οποίο ισχύει $F(x, y) = c$, και επομένως ισχύει

$$F(x, f(x)) = c \quad \textit{για κάθε } x \in I.$$

Η συνάρτηση $f : I \to J$ έχει συνεχή παράγωγο ως προς x στο διάστημα I, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} \quad \textit{για κάθε } x \in I.$$

(ii) Έστω $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό διάστημα I, το οποίο περιέχει το x_0, και ανοικτό διάστημα J, το οποίο περιέχει το y_0, ώστε για κάθε $y \in J$ να υπάρχει μοναδικό $x \in I$ ώστε το σημείο (x, y) να ανήκει στο U_c ή, ισοδύναμα, να ισχύει $F(x, y) = c$. Με άλλα λόγια, το μέρος του συνόλου U_c το οποίο περιέχεται στο ανοικτό ορθογώνιο $I \times J$ είναι γράφημα μίας συνάρτησης $g : J \to I$, όπου για κάθε $y \in J$ το $g(y)$ είναι το μοναδικό $x \in I$ για το οποίο ισχύει $F(x, y) = c$, και επομένως ισχύει

$$F(g(y), y) = c \quad \textit{για κάθε } y \in J.$$

Η συνάρτηση $g : J \to I$ έχει συνεχή παράγωγο ως προς y στο διάστημα J, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dg}{dy}(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(g(y),y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(g(y),y)} \quad \textit{για κάθε } y \in J.$$

Απόδειξη. (i) Έστω $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.
Επειδή η $\frac{\partial F}{\partial y}$ είναι συνεχής στο (x_0, y_0), υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα I', το οποίο περιέχει το x_0, και κάποιο ανοικτό διάστημα J, το οποίο περιέχει το y_0, ώστε να ισχύει $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ για κάθε (x, y) στο ανοικτό ορθογώνιο $I' \times J$.
Τώρα, η συνάρτηση (μίας μεταβλητής, της y) $F(x_0, y)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα J. Παίρνουμε οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in J$ με $y_1 < y_0 < y_2$, οπότε είναι

$$F(x_0, y_1) < F(x_0, y_0) = c < F(x_0, y_2).$$

Επειδή η F είναι συνεχής, υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subseteq I'$, το οποίο περιέχει το x_0, ώστε να ισχύει

$$F(x, y_1) < c < F(x, y_2)$$

για κάθε $x \in I$.
Τώρα, για κάθε $x \in I$, επειδή η συνάρτηση (μίας μεταβλητής, της y) $F(x, y)$ είναι συνεχής στο διάστημα J, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει y ανάμεσα στα y_1, y_2 ώστε να είναι $F(x, y) = c$. Μάλιστα, επειδή η ίδια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα J, αυτό το y είναι μοναδικό στο J.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει μοναδικό $y \in J$ ώστε να είναι $F(x, y) = c$. Έτσι ορίζεται συνάρτηση

$$f : I \to J,$$

όπου για κάθε $x \in I$ το $f(x)$ είναι το μοναδικό $y \in J$ για το οποίο ισχύει $F(x, y) = c$, και επομένως ισχύει

$$F(x, f(x)) = c \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα I. Παίρνουμε οποιοδήποτε $x \in I$ και θα δούμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Γνωρίζουμε ότι $F(x, f(x)) = c$. Έστω $\epsilon > 0$. Παίρνουμε $y_1, y_2 \in J$ ώστε $f(x) - \epsilon < y_1 < f(x) < y_2 < f(x) + \epsilon$. Τότε είναι $F(x, y_1) < F(x, f(x)) = c < F(x, y_2)$. Λόγω συνέχειας της F, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $F(x', y_1) < c < F(x', y_2)$ για κάθε $x' \in I$ για το οποίο ισχύει $x - \delta < x' < x + \delta$. Άρα για κάθε τέτοιο x' από το θεώρημα ενδιάμεσης

τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει y' ανάμεσα στα y_1, y_2 ώστε να είναι $F(x', y') = c$. Επειδή $y_1, y_2 \in J$, ισχύει $y \in J$. Γνωρίζουμε, όμως, ότι, επειδή $x' \in I$, το μοναδικό $y' \in J$ για το οποίο ισχύει $F(x', y') = c$ είναι το $y' = f(x')$. Άρα $y_1 < f(x') < y_2$ και άρα $f(x) - \epsilon < f(x') < f(x) + \epsilon$. Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) - \epsilon < f(x') < f(x) + \epsilon$ για κάθε $x' \in I$ για το οποίο ισχύει $x - \delta < x' < x + \delta$. Άρα η f είναι συνεχής στο x.
Τέλος, θα μελετήσουμε την παραγωγισιμότητα της $f : I \to J$ στο διάστημα I, δηλαδή σε οποιοδήποτε $x \in I$.
Θεωρούμε τυχόν $x \in I$ και τυχόν $x' \in I$. Τότε

$$F(x', f(x')) - F(x, f(x)) = c - c = 0.$$

Ισοδύναμα

$$F(x', f(x')) - F(x, f(x')) + F(x, f(x')) - F(x, f(x)) = 0.$$

Λόγω του γνωστού θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, ισχύει

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}(\xi, f(x'))(x' - x) + \tfrac{\partial F}{\partial y}(x, \eta)(f(x') - f(x)) = 0$$

για κάποιο ξ ανάμεσα στα x, x' και για κάποιο η ανάμεσα στα $f(x), f(x')$. Συνεπάγεται

$$\tfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, f(x'))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta)}.$$

Τώρα, έστω ότι $x' \to x$. Επειδή το ξ είναι ανάμεσα στα x, x', συνεπάγεται $\xi \to x$. Επίσης, επειδή η f είναι συνεχής στο x, συνεπάγεται $f(x') \to f(x)$. Άρα, επειδή η $\frac{\partial F}{\partial x}$ είναι συνεχής, συνεπάγεται

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}(\xi, f(x')) \to \tfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).$$

Επειδή το η είναι ανάμεσα στα $f(x), f(x')$, συνεπάγεται $\eta \to f(x)$. Άρα, επειδή η $\frac{\partial F}{\partial y}$ είναι συνεχής, συνεπάγεται

$$\tfrac{\partial F}{\partial y}(x, \eta) \to \tfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)).$$

Συμπεραίνουμε ότι, αν $x' \to x$, τότε

$$\tfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} \to -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x και

$$\tfrac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Τέλος, από τον τελευταίο τύπο για την $\frac{df}{dx}(x)$ και από την συνέχεια των $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ και f, βλέπουμε ότι η $\frac{df}{dx}$ είναι συνεχής στο I.
Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). $\square$

Στην περίπτωση (i) του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, δηλαδή όταν $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, λέμε ότι **κοντά στο σημείο** (x_0, y_0) (πιο συγκεκριμένα, στο ανοικτό ορθογώνιο $I \times J$ το οποίο περιέχει το (x_0, y_0)), μπορούμε να λύσουμε ως προς y την εξίσωση $F(x, y) = c$, εκφράζοντας το y ως συνάρτηση $y = f(x)$. Αναλόγως, στην περίπτωση (ii), δηλαδή όταν $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, λέμε ότι **κοντά στο σημείο** (x_0, y_0) (πιο συγκεκριμένα, στο ανοικτό ορθογώνιο $I \times J$ το οποίο περιέχει το (x_0, y_0)), μπορούμε να λύσουμε ως προς x την εξίσωση $F(x, y) = c$, εκφράζοντας το x ως συνάρτηση $x = g(y)$.

Παράδειγμα 4.3. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2 + xy + e^y = 2$$

και θέλουμε να δούμε αν μπορούμε να την λύσουμε ως προς y, εκφράζοντας το y ως συνάρτηση $y = f(x)$, κοντά στο σημείο $(1,0)$. Κατ' αρχάς, το σημείο $(1,0)$ ικανοποιεί την εξίσωση, αλλιώς το πρόβλημα δεν θα είχε νόημα. Σύμφωνα με το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, πρέπει να δούμε αν ικανοποιούνται κάποιες προϋποθέσεις. Η συνάρτηση

$$F(x,y) = x^2 + xy + e^y$$

έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ (και άρα σε οποιονδήποτε δίσκο με κέντρο το $(1,0)$):

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x + y, \quad \tfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + e^y.$$

Επειδή θέλουμε να λύσουμε ως προς y, ελέγχουμε αν η μερική παράγωγος ως προς y στο σημείο $(1,0)$ είναι $\neq 0$:

$$\tfrac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2 \neq 0.$$

Τώρα, το θεώρημα λέει ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I, το οποίο περιέχει το 1, και ανοικτό διάστημα J, το οποίο περιέχει το 0, ώστε για κάθε $x \in I$ να υπάρχει μοναδικό $y \in J$ ώστε να ισχύει $F(x,y) = 2$. Δηλαδή ορίζεται συνάρτηση $f : I \to J$, όπου για κάθε $x \in I$ το $f(x)$ είναι το μοναδικό $y \in J$ για το οποίο ισχύει $F(x,y) = 2$. Έχουμε, λοιπόν,

$$x^2 + xf(x) + e^{f(x)} = F(x, f(x)) = 2 \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο ως προς x στο διάστημα I, της οποίας ο τύπος της είναι

$$\tfrac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} = -\tfrac{2x+f(x)}{x+e^{f(x)}} \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Προσέξτε. Με βάση το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, με τις κατάλληλες προϋποθέσεις, μία εξίσωση $F(x,y) = c$ λύνεται ως προς y συναρτήσει του x, δηλαδή ότι το y εκφράζεται ως συνάρτηση $y = f(x)$, όταν το x περιέχεται σε κάποιο ανοικτό διάστημα I. Όμως, το θεώρημα δεν λέει ποιό ακριβώς είναι το διάστημα I ούτε ποιός ακριβώς είναι ο τύπος $y = f(x)$. Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης είναι **θεώρημα ύπαρξης**. Αν θέλουμε να βρούμε συγκεκριμένο διάστημα I και συγκεκριμένο τύπο $y = f(x)$ πρέπει να *λύσουμε αλγεβρικά* την εξίσωση $F(x,y) = c$. Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο στις περισσότερες περιπτώσεις. Στο τελευταίο παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 + xy + e^y = 2$ είναι αδύνατο να λυθεί ως προς y.

Υπάρχει και ένα γενικότερο θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για συναρτήσεις F με $n+1$ μεταβλητές,

$$F(x_1, \dots, x_n, y),$$

όπου θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = c$$

ως προς την τελευταία μεταβλητή y ως συνάρτηση των υπόλοιπων μεταβλητών $(x_1, \dots, x_n)$. Εννοείται ότι η μεταβλητή ως προς την οποία θέλουμε να λύσουμε μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις $n+1$ μεταβλητές, και τότε απλώς προσαρμόζουμε κατάλληλα το θεώρημα.

Οδηγός μας είναι το εξής απλοϊκό παράδειγμα, ανάλογο του πρώτου παραδείγματος αυτής της ενότητας.

Παράδειγμα 4.4. Θεωρούμε την απλή ειδική περίπτωση *γραμμικής συνάρτησης*

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + by.$$

Για να μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + by = F(x_1, \ldots, x_n, y) = c$$

ως προς y, δηλαδή για να μπορούμε να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση των $x_1, \ldots, x_n$, χρειάζεται να υποθέσουμε ότι $b \neq 0$, ώστε να πάρουμε

$$y = -\tfrac{a_1}{b}\, x_1 - \cdots - \tfrac{a_n}{b}\, x_n + \tfrac{c}{b}.$$

Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\tfrac{\partial F}{\partial y} = b,$$

οπότε η συνθήκη $b \neq 0$ ισοδυναμεί με την $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. *Έστω $F : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, έστω εσωτερικό σημείο $(x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_0)$ του U, και έστω*

$$U_c = \{(x_1, \ldots, x_n, y) \in U \mid F(x_1, \ldots, x_n, y) = c\}$$

ένα ισοσταθμικό σύνολο της F. Υποθέτουμε ότι το $(x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_0)$ ανήκει στο U_c, δηλαδή

$$F(x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_0) = c.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}$ σε μία μπάλα με κέντρο το $(x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_0)$, και ότι

$$\tfrac{\partial F}{\partial y}(x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_0) \neq 0.$$

Τότε υπάρχει ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο I στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο περιέχει το $(x_{01}, \ldots, x_{0n})$, και ανοικτό διάστημα J στο $\mathbb{R}$, το οποίο περιέχει το y_0, ώστε για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in I$ να υπάρχει μοναδικό $y \in J$ ώστε το σημείο $(x_1, \ldots, x_n, y)$ να ανήκει στο U_c ή, ισοδύναμα, να ισχύει $F(x_1, \ldots, x_n, y) = c$. Με άλλα λόγια, το μέρος του συνόλου U_c το οποίο περιέχεται στο ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $I \times J$ είναι γράφημα μίας συνάρτησης $f : I \to J$, όπου για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in I$ το $f(x_1, \ldots, x_n)$ είναι το μοναδικό $y \in J$ για το οποίο ισχύει $F(x_1, \ldots, x_n, y) = c$, και επομένως ισχύει

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = c \quad \text{για κάθε } (x_1, \ldots, x_n) \in I.$$

Η συνάρτηση $f : I \to J$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο I, οι οποίες δίνονται από τους τύπους

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))} \quad \text{για κάθε } (x_1, \ldots, x_n) \in I.$$

Παράδειγμα 4.5. Θεωρούμε την εξίσωση

$$xy + z^2 + 3xz^5 = 4$$

και θέλουμε να δούμε αν μπορούμε να την λύσουμε ως προς z, εκφράζοντας το z ως συνάρτηση $z = f(x, y)$, κοντά στο σημείο $(1, 0, 1)$. Το σημείο $(1, 0, 1)$ ικανοποιεί την εξίσωση, και ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης. Η συνάρτηση

$$F(x, y, z) = xy + z^2 + 3xz^5$$

έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ (και άρα σε οποιαδήποτε μπάλα με κέντρο το $(1, 0, 1)$):

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = y + 3z^5, \quad \tfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x, \quad \tfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z + 15xz^4.$$

Επειδή θέλουμε να λύσουμε ως προς z, ελέγχουμε αν η μερική παράγωγος ως προς z στο σημείο $(1,0,1)$ είναι $\neq 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 17 \neq 0.$$

Άρα υπάρχει ανοικτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο I στον $\mathbb{R}^2$, το οποίο περιέχει το $(1,0)$, και ανοικτό διάστημα J, το οποίο περιέχει το 1, ώστε για κάθε $(x,y) \in I$ να υπάρχει μοναδικό $z \in J$ ώστε να ισχύει $F(x,y,z) = 4$. Δηλαδή ορίζεται συνάρτηση $f : I \to J$, όπου για κάθε $(x,y) \in I$ το $f(x,y)$ είναι το μοναδικό $z \in J$ για το οποίο ισχύει $F(x,y,z) = 4$. Έχουμε, λοιπόν,

$$xy + f(x,y)^2 + 3xf(x,y)^5 = F(x,y,f(x,y)) = 4 \quad \text{για κάθε } (x,y) \in I.$$

Η συνάρτηση f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς x και y στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο I, και οι τύποι τους είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} = -\frac{y+3f(x,y)^5}{2f(x,y)+15xf(x,y)^4},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} = -\frac{x}{2f(x,y)+15xf(x,y)^4}$$

για κάθε $(x,y) \in I$.

4.2 Κλίση και ισοσταθμικά σύνολα πραγματικής συνάρτησης.

Πρόταση 4.1. *Έστω $F : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$, και έστω ισοσταθμικό σύνολο*

$$U_c = \{(x,y) \in U \mid F(x,y) = c\}$$

της F. Υποθέτουμε ότι το (x_0,y_0) είναι σημείο του U_c, δηλαδή ότι $F(x_0,y_0) = c$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $\frac{\partial F}{\partial x}$ και $\frac{\partial F}{\partial y}$ σε έναν δίσκο με κέντρο το (x_0,y_0), και ότι

$$\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0).$$

Τότε το διάνυσμα $\nabla F(x_0,y_0)$, μεταφερμένο στο σημείο (x_0,y_0), είναι κάθετο διάνυσμα στο ισοσταθμικό σύνολο U_c.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, διακρίνοντας τις περιπτώσεις (i) και (ii) του θεωρήματος.
Η περίπτωση (i) είναι όταν $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό διάστημα I, το οποίο πειέχει το x_0, και ανοικτό διάστημα J, το οποίο περιέχει το y_0, ώστε το μέρος του ισοσταθμικού συνόλου U_c το οποίο περιέχεται στο ανοικτό ορθογώνιο $I \times J$ είναι γράφημα μίας συνάρτησης $f : I \to J$, όπου για κάθε $x \in I$ το $f(x)$ είναι το μοναδικό $y \in J$ για το οποίο ισχύει $F(x,y) = c$, και επομένως ισχύει

$$F(x,f(x)) = c \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Ειδικώτερα, είναι $f(x_0) = y_0$. Η συνάρτηση $f : I \to J$ έχει συνεχή παράγωγο ως προς x στο διάστημα I, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Επειδή το μέρος του U_c το οποίο περιέχεται στο ορθογώνιο $I \times J$ είναι το γράφημα της συνάρτησης f, συνεπάγεται ότι έχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x_0,y_0) = (x_0,f(x_0))$, με καρτεσιανή εξίσωση

$$y = \frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{df}{dx}(x_0)x - y = \frac{df}{dx}(x_0)x_0 - f(x_0).$$

Επομένως, ένα κάθετο διάνυσμα στην εφαπτόμενη ευθεία είναι οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του

$$\big(\tfrac{df}{dx}(x_0), -1\big).$$

Όμως, είναι

$$\frac{df}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,f(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,f(x_0))} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Πολλαπλασιάζοντας το $(\frac{df}{dx}(x_0), -1)$ με τον αριθμό $-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$, βρίσκουμε ότι το διάνυσμα

$$\big(\tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \tfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\big) = \nabla F(x_0, y_0)$$

είναι κάθετο στην εφαπτόμενη ευθεία του ισοσταθμικού συνόλου U_c στο σημείο του (x_0, y_0). Άρα, αν μεταφέρουμε το διάνυσμα $\nabla F(x_0, y_0)$ στο σημείο (x_0, y_0), τότε το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο ισοσταθμικό σύνολο U_c στο σημείο του (x_0, y_0).
Η απόδειξη στην περίπτωση (ii), δηλαδή όταν $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα 4.6. Θεωρούμε ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ με καρτεσιανή εξίσωση $ax + by = c$, όπου ένα τουλάχιστον από τα a, b δεν είναι ίσο με 0.
Αν ορίσουμε την συνάρτηση $F(x, y) = ax + by$, τότε η ευθεία είναι το ισοσταθμικό σύνολο

$$\{(x, y) \,|\, ax + by = c\} = \{(x, y) \,|\, F(x, y) = c\}.$$

Η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial F}{\partial x} = a$ και $\frac{\partial F}{\partial y} = b$ σε κάθε σημείο (x, y) του $\mathbb{R}^2$. Επειδή

$$\nabla F(x, y) = \big(\tfrac{\partial F}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\big) = (a, b) \neq (0, 0)$$

σε κάθε σημείο (x, y) της ευθείας, από την πρόταση 4.1 συνεπάγεται ότι το διάνυσμα (a, b) είναι κάθετο στην ευθεία. Αυτό είναι κάτι το οποίο ήδη γνωρίζαμε.

Παράδειγμα 4.7. Θεωρούμε κύκλο στον $\mathbb{R}^2$ με καρτεσιανή εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ με $r > 0$.
Αν ορίσουμε την συνάρτηση $F(x, y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, τότε ο κύκλος είναι το ισοσταθμικό σύνολο

$$\{(x, y) \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\} = \{(x, y) \,|\, F(x, y) = r^2\}.$$

Η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - x_0)$ και $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - y_0)$ σε κάθε σημείο (x, y) του $\mathbb{R}^2$. Έχουμε

$$\nabla F(x, y) = \big(\tfrac{\partial F}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\big) = (2(x - x_0), 2(y - y_0)) = 2(x - x_0, y - y_0) \neq (0, 0)$$

σε κάθε σημείο (x, y) του κύκλου. Πράγματι οι συντεταγμένες του $(x - x_0, y - y_0)$ δεν μπορεί να είναι και οι δύο ίσες με 0, αφού το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με $r^2 > 0$. Τώρα, από την πρόταση 4.1 συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $2(x - x_0, y - y_0)$ είναι κάθετο στον κύκλο στο σημείο του (x, y). Αυτό είναι κάτι το οποίο μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα: το ακτινικό διάνυσμα από το κέντρο (x_0, y_0) του κύκλου μέχρι το σημείο του (x, y) είναι το $(x - x_0, y - y_0)$ και είναι κάθετο στον κύκλο στο (x, y), οπότε και το διπλάσιό του είναι κάθετο στον κύκλο στο (x, y).

Παράδειγμα 4.8. Θεωρούμε την παραβολή στο xy-επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $y = x^2-x-2$. Το σημείο $(3, 4)$ ανήκει στην παραβολή.
Ορίζουμε την συνάρτηση $F(x, y) = x^2-x-y$ και βλέπουμε ότι η παραβολή είναι ένα ισοσταθμικό σύνολο της F:

$$\{(x, y) \,|\, y = x^2 - x - 2\} = \{(x, y) \,|\, F(x, y) = 2\}.$$

Η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 1$ και $\frac{\partial F}{\partial y} = -1$ σε κάθε σημείο (x, y) του $\mathbb{R}^2$. Είναι

$$\nabla F(3, 4) = \big(\tfrac{\partial F}{\partial x}(3, 4), \tfrac{\partial F}{\partial y}(3, 4)\big) = (5, -1) \neq (0, 0)$$

στο σημείο $(3, 4)$ της παραβολής. Άρα από την πρόταση 4.1 συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $(5, -1)$ είναι κάθετο στην παραβολή στο σημείο της $(3, 4)$.

Φυσικά, υπάρχει και το ανάλογο αποτέλεσμα για ισοσταθμικά σύνολα πραγματικών συναρτήσεων περισσοτέρων των δύο μεταβλητών.

Πρόταση 4.2. *Έστω $F : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και έστω ισοσταθμικό σύνολο*

$$U_c = \{\mathbf{x} \in U \mid F(\mathbf{x}) = c\}$$

της F. Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο του U_c, δηλαδή ότι $F(\mathbf{x}_0) = c$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}$ σε μία μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}_0$, και ότι

$$\nabla F(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}.$$

Τότε το διάνυσμα $\nabla F(\mathbf{x}_0)$, μεταφερμένο στο σημείο $\mathbf{x}_0$, είναι κάθετο διάνυσμα στο ισοσταθμικό σύνολο U_c.

Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι παρόμοια με την απόδειξη της πρότασης 4.1 για την περίπτωση $n = 2$. Δεν θα την κάνουμε. Βασίζεται στο γενικότερο θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

Παράδειγμα 4.9. Θεωρούμε το σύνολο των σημείων (x, y, z) στον xyz-χώρο τα οποία ικανοποιούν την καρτεσιανή εξίσωση

$$y + xz \log(x + y + z) = 4.$$

Το σημείο $(2, 4, -5)$ ανήκει στο σύνολο αυτό.
Ορίζουμε την συνάρτηση $F(x, y, z) = y + xz \log(x + y + z)$ και βλέπουμε ότι το σύνολο το οποίο θεωρήσαμε είναι ένα ισοσταθμικό σύνολο της F:

$$\{(x, y, z) \mid y + xz \log(x + y + z) = 4\} = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 4\}.$$

Η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους

$$\tfrac{\partial F}{\partial x} = z \log(x + y + z) + \tfrac{xz}{x+y+z}, \quad \tfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + \tfrac{xz}{x+y+z}, \quad \tfrac{\partial F}{\partial z} = x \log(x + y + z) + \tfrac{xz}{x+y+z}$$

σε κάθε σημείο (x, y, z) του πεδίου ορισμού της F, το οποίο είναι ο ανοικτός ημιχώρος

$$\{(x, y, z) \mid x + y + z > 0\}.$$

Είναι

$$\nabla F(2, 4, -5) = \big(\tfrac{\partial F}{\partial x}(2, 4, -5), \tfrac{\partial F}{\partial y}(2, 4, -5), \tfrac{\partial F}{\partial z}(2, 4, -5)\big) = (-10, -9, -10) \neq (0, 0, 0)$$

στο σημείο $(2, 4, -5)$ του ισοσταθμικού συνόλου. Άρα από την πρόταση 4.1 συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $(-10, -9, -10)$ είναι κάθετο στο ισοσταθμικό σύνολο στο σημείο του $(2, 4, -5)$.

4.3 Ακρότατα υπό συνθήκες πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Το επόμενο θέμα μας είναι *η μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση υπό συνθήκες* μίας πραγματικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 4.10. Αναζητάμε την μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $h(x, y) = x^2 + xy + y^2$ όταν $x^2 + y^2 = 1$.
Η σχέση $x^2 + y^2 = 1$ είναι η λεγόμενη *συνθήκη* ή *περιορισμός*. Δηλαδή, θεωρούμε τις τιμές της h όταν την περιορίσουμε στο σύνολο των σημείων (x, y) τα οποία ικανοποιούν την συγκεκριμένη

συνθήκη, δηλαδή στον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα 1, και από αυτές τις τιμές της h θέλουμε να βρούμε την μέγιστη και την ελάχιστη. Παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο σύνολο είναι ισοσταθμικό σύνολο της συνάρτησης $F(x,y) = x^2 + y^2$.

Το όνομα της μεθόδου η οποία περιγράφεται στις επόμενες προτάσεις σχετίζεται με το ότι οι διάφοροι αριθμοί λ οι οποίοι εμφανίζονται στις διατυπώσεις τους ονομάζονται **πολλαπλασιαστές Lagrange**.

Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange. *Έστω $h, F : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$, και έστω ισοσταθμικό σύνολο*

$$U_c = \{(x,y) \in U \mid F(x,y) = c\}$$

της F. Υποθέτουμε ότι το (x_0,y_0) είναι σημείο του U_c, δηλαδή ότι $F(x_0,y_0) = c$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0), ότι η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε έναν δίσκο με κέντρο το (x_0,y_0), και ότι

$$\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0).$$

Αν το (x_0,y_0) είναι σημείο τοπικού μεγίστου (ελαχίστου) της h περιορισμένης στο σύνολο U_c, δηλαδή αν ισχύει $h(x,y) \leq (\geq) h(x_0,y_0)$ για κάθε $(x,y) \in U_c$ το οποίο είναι κοντά στο (x_0,y_0), τότε υπάρχει αριθμός λ ώστε

$$\nabla h(x_0,y_0) = \lambda \, \nabla F(x_0,y_0).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, διακρίνοντας και πάλι τις περιπτώσεις (i) και (ii) του θεωρήματος.
Η περίπτωση (i) είναι όταν $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό διάστημα I, το οποίο περιέχει το x_0, και ανοικτό διάστημα J, το οποίο περιέχει το y_0, ώστε το μέρος του ισοσταθμικού συνόλου U_c το οποίο περιέχεται στο ανοικτό ορθογώνιο $I \times J$ είναι γράφημα μίας συνάρτησης $f : I \to J$. Ειδικώτερα, είναι $f(x_0) = y_0$. Η συνάρτηση $f : I \to J$ έχει συνεχή παράγωγο ως προς x στο διάστημα I, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Τώρα θεωρούμε την σύνθετη συνάρτηση $k : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$k(x) = h(x, f(x)) \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Η συνάρτηση k ορίζεται, διότι για κάθε $x \in I$ το σημείο $(x, f(x))$ ανήκει στο $U_c \subseteq U$. Οι συναρτήσεις x και $f(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I, οπότε η (διανυσματική) συνάρτηση $(x, f(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο I. Επίσης, το σύνολο τιμών της $(x, f(x))$ περιέχεται στο ορθογώνιο $I \times J$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0,y_0) = (x_0, f(x_0))$, συνεπάγεται ότι η $k : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Τώρα βλέπουμε ότι όταν το x είναι κοντά στο x_0, τότε το $(x, f(x))$ είναι κοντά στο $(x_0, f(x_0)) = (x_0, y_0)$ (λόγω συνέχειας της f) και ανήκει στο ισοσταθμικό σύνολο U_c. Άρα, αν το (x_0,y_0) είναι σημείο τοπικού μεγίστου της h περιορισμένης στο σύνολο U_c, τότε συνεπάγεται

$$k(x) = h(x, f(x)) \leq h(x_0,y_0) = h(x_0, f(x_0)) = k(x_0)$$

για κάθε x κοντά στο x_0. Από το κριτήριο πρώτης παραγώγου συνεπάγεται

$$0 = k'(x_0) = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

και άρα

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \frac{\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Αυτό σημαίνει ότι
$$\nabla h(x_0, y_0) = \lambda \nabla F(x_0, y_0),$$
με τον αριθμό $\lambda = \frac{\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$.
Η απόδειξη αν το (x_0, y_0) είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της h περιορισμένης στο σύνολο U_c, αλλά και στην περίπτωση (ii) του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, δηλαδή αν $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, είναι παρόμοια. $\square$

Ας δούμε πώς θα εφαρμόσουμε την μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.11. Αναζητάμε την μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $h(x, y) = x^2 + xy + y^2$ όταν $x^2 + y^2 = 1$.
Θεωρούμε την $F(x, y) = x^2 + y^2$ και το ισοσταθμικό σύνολο
$$U_1 = \{(x, y) \,|\, F(x, y) = 1\} = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$
Οι συναρτήσεις h, F έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = x + 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y.$$
Επίσης, για κάθε $(x, y) \in U_1$ ισχύει
$$\nabla F(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0).$$
Άρα, αν υποθέσουμε ότι το $(x, y) \in U_1$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της h περιορισμένης στο σύνολο U_1, τότε υπάρχει αριθμός λ ώστε
$$\nabla h(x, y) = \lambda \nabla F(x, y)$$
ή, ισοδύναμα,
$$(2x + y, x + 2y) = \lambda(2x, 2y).$$
Συνδυάζοντας με την σχέση $x^2 + y^2 = 1$ την οποία ικανοποιεί κάθε $(x, y) \in U_1$, βρίσκουμε ότι το σημείο τοπικού ακροτάτου (x, y) είναι λύση του συστήματος:
$$\begin{cases} 2x + y = 2\lambda x \\ x + 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
Το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων γράφεται
$$\begin{cases} 2(1 - \lambda)x + y = 0 \\ x + 2(1 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$
Αν η ορίζουσα του συστήματος είναι $\neq 0$, τότε έχουμε $(x, y) = (0, 0)$, αλλά αυτό το ζευγάρι δεν ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος. Άρα πρέπει η ορίζουσα να είναι 0:
$$4(1 - \lambda)^2 - 1 = 0$$
και άρα $\lambda = \frac{1}{2}$ ή $\lambda = \frac{3}{2}$. Με $\lambda = \frac{3}{2}$ βρίσκουμε από το δεύτερο σύστημα ότι $y = x$, και με $\lambda = \frac{1}{2}$ βρίσκουμε $y = -x$. Συνδυάζοντας με την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος βρίσκουμε τα τέσσερα πιθανά σημεία τοπικού ακροτάτου:
$$\pm(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \quad \pm(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2).$$
Στα δύο πρώτα σημεία η h έχει τιμή $\frac{3}{2}$, και στα δύο άλλα σημεία η h έχει τιμή $\frac{1}{2}$.
Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής η συνεχής συνάρτηση h έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο κλειστό και φραγμένο σύνολο U_1. Άρα οι δύο τιμές, $\frac{3}{2}$ και $\frac{1}{2}$, είναι η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της h υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$.

Παράδειγμα 4.12. Αναζητάμε την μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $h(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$ στο σύνολο $K = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Το K είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, οπότε η h, η οποία είναι συνεχής στο K, έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο K. Η h έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^2$. Το σύνορο του K είναι ο κύκλος $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$, ο οποίος είναι ισοσταθμικό σύνολο της συνάρτησης $F(x, y) = x^2 + y^2$, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^2$, και ισχύει $\nabla F(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ σε κάθε (x, y) στο σύνορο του K.
Βρίσκουμε τα πιθανά σημεία (x, y) τοπικού ακροτάτου της h στο εσωτερικό του K, δηλαδή στα σημεία τα οποία ικανοποιούν την $x^2 + y^2 < 1$, εφαρμόζοντας το κριτήριο πρώτης παραγώγου:

$$\nabla h(x, y) = (0, 0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(2x - 4y, -4x + 2y) = (0, 0).$$

Δηλαδή, το (x, y) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι το $(x, y) = (0, 0)$.
Κατόπιν βρίσκουμε τα σημεία (x, y) τοπικού ακροτάτου της h περιορισμένης στο σύνορο του K, δηλαδή υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$, με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Κάτι παρόμοιο έγινε στο προηγούμενο παράδειγμα. Αν υποθέσουμε ότι το (x, y) με $x^2 + y^2 = 1$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της h περιορισμένης στο σύνορο του K, τότε υπάρχει αριθμός λ ώστε

$$\nabla h(x, y) = \lambda \, \nabla F(x, y)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(2x - 4y, -4x + 2y) = \lambda(2x, 2y).$$

Επομένως, το (x, y) είναι λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2\lambda x \\ -4x + 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων γράφεται

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (1 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Αν η ορίζουσα του συστήματος είναι $\neq 0$, τότε έχουμε $(x, y) = (0, 0)$, αλλά αυτό το ζευγάρι δεν ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος. Άρα πρέπει η ορίζουσα να είναι 0:

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

και άρα $\lambda = -1$ ή $\lambda = 3$. Με $\lambda = -1$ βρίσκουμε από το δεύτερο σύστημα ότι $y = x$ και με $\lambda = 3$ βρίσκουμε $y = -x$. Συνδυάζοντας με την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος, βρίσκουμε τα τέσσερα πιθανά σημεία τοπικού ακροτάτου στο σύνορο του K:

$$\pm(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \quad \pm(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2).$$

Άρα συνολικά στο K έχουμε πέντε πιθανά σημεία τοπικού ακροτάτου:

$$(0,0), \quad \pm(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \quad \pm(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2).$$

Στο $(0,0)$ η h έχει τιμή 0, στα δύο επόμενα σημεία η h έχει τιμή -1 και στα δύο τελευταία σημεία η h έχει τιμή 3.
Άρα οι τιμές -1 και 3 είναι η ελάχιστη τιμή και η μέγιστη τιμή της h στο K.

Το γενικό θεώρημα βάσει του οποίου λύνεται το συγκεκριμένο πρόβλημα καθώς και πολλά άλλα παρόμοια είναι το εξής.

Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange. *Έστω $h, F : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και έστω ισοσταθμικό σύνολο*

$$U_c = \{\mathbf{x} \in U \mid F(\mathbf{x}) = c\}$$

της F. Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο του U_c, δηλαδή ότι $F(\mathbf{x}_0) = c$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, ότι η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε μία μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}_0$, και ότι

$$\nabla F(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}.$$

Αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου (ελαχίστου) της h περιορισμένης στο σύνολο U_c, δηλαδή αν ισχύει $h(\mathbf{x}) \leq (\geq) h(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $\mathbf{x} \in U_c$ το οποίο είναι κοντά στο $\mathbf{x}_0$, τότε υπάρχει αριθμός λ ώστε

$$\nabla h(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla F(\mathbf{x}_0).$$

Παράδειγμα 4.13. Θέλουμε να βρούμε την μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της $h(x,y) = x - y + z$ στο σύνολο $K = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
Το K, η κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^3$ με κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα 1, είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, οπότε η h, η οποία είναι συνεχής στο K, έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο K. Η h έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^3$. Το σύνορο του K είναι η σφαίρα $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, η οποία είναι ισοσταθμικό σύνολο της συνάρτησης $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^3$, και ισχύει $\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ σε κάθε (x,y,z) στο σύνορο του K.
Βρίσκουμε τα πιθανά σημεία (x,y,z) τοπικού ακροτάτου της h στο εσωτερικό του K, δηλαδή με $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, εφαρμόζοντας το κριτήριο πρώτης παραγώγου:

$$\nabla h(x,y,z) = (0,0,0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(1,-1,1) = (0,0,0),$$

το οποίο είναι αδύνατο. Άρα δεν υπάρχει κανένα εσωτερικό σημείο τοπικού ακροτάτου.
Τώρα βρίσκουμε τα σημεία (x,y,z) τοπικού ακροτάτου της h περιορισμένης στο σύνορο του K, δηλαδή με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Αν το (x,y,z) με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της h περιορισμένης στο σύνορο του K, τότε υπάρχει αριθμός λ ώστε

$$\nabla h(x,y,z) = \lambda \nabla F(x,y,z)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(1,-1,1) = \lambda(2x, 2y, 2z).$$

Συνδυάζοντας με την σχέση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, βρίσκουμε ότι το σημείο τοπικού ακροτάτου (x,y,z) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Προφανώς είναι $\lambda \neq 0$, οπότε από τις τρείς πρώτες εξισώσεις του συστήματος παίρνουμε

$$x = \tfrac{1}{2\lambda}, \quad y = -\tfrac{1}{2\lambda}, \quad z = \tfrac{1}{2\lambda}.$$

Τότε η τέταρτη εξίσωση γίνεται

$$\tfrac{3}{4\lambda^2} = 1$$

και άρα $\lambda = -\sqrt{3}/2$ ή $\lambda = \sqrt{3}/2$. Άρα έχουμε δύο πιθανά σημεία τοπικού ακροτάτου στο σύνορο του K:

$$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), \quad (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

Στο πρώτο σημείο η h έχει τιμή $-\sqrt{3}$, και στο δεύτερο σημείο έχει τιμή $\sqrt{3}$.
Άρα οι τιμές $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{3}$ είναι η ελάχιστη τιμή και η μέγιστη τιμή της h στο K.

Τώρα θα περιγράψουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε περισσότερους περιορισμούς ή συνθήκες.

Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange. *Έστω $h, F_1, \ldots, F_m : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$, και έστω το σύνολο*

$$A = \{\mathbf{x} \in U \mid F_1(\mathbf{x}) = c_1, \ldots, F_m(\mathbf{x}) = c_m\}.$$

Το A είναι τομή ισοσταθμικών συνόλων των $F_1, \ldots, F_m$. Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο του A, δηλαδή ότι $F_1(\mathbf{x}_0) = c_1, \ldots, F_m(\mathbf{x}_0) = c_m$. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι $h, F_1, \ldots, F_m$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε μία μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}_0$, και ότι τα διανύσματα $\nabla F_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F_m(\mathbf{x}_0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου (ελαχίστου) της h περιορισμένης στο σύνολο A, δηλαδή αν ισχύει $h(\mathbf{x}) \leq (\geq) h(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$ το οποίο είναι κοντά στο $\mathbf{x}_0$, τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ώστε

$$\nabla h(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla F_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_m \nabla F_m(\mathbf{x}_0).$$

Παράδειγμα 4.14. Θέλουμε να βρούμε την μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της $h(x, y) = x + y + z$ με τους περιορισμούς $x^2 + y^2 = 1$ και $2x + z = 1$. Με άλλα λόγια, θέλουμε τις ακρότατες τιμές της h στο σύνολο

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 2x + z = 1\}.$$

Το A είναι η τομή του κυλίνδρου με καρτεσιανή εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ και του επιπέδου με καρτεσιανή εξίσωση $2x + z = 1$, και άρα είναι μια έλλειψη, δηλαδή ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο. Τώρα, η h, η οποία είναι συνεχής στο K, έχει οπωσδήποτε μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο K. Η h καθώς και οι συναρτήσεις $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2$ και $F_2(x, y, z) = 2x + z$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^3$. Είναι εύκολο να δούμε ότι τα διανύσματα

$$\nabla F_1(x, y, z) = (2x, 2y, 0), \quad \nabla F_2(x, y, z) = (2, 0, 1)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα σε κάθε $(x, y, z) \in A$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι για κάποιους αριθμούς λ_1, λ_2 ισχύει

$$\lambda_1 \nabla F_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla F_2(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(2, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Αυτό ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 y = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Από την τρίτη εξίσωση έχουμε $\lambda_2 = 0$. Επειδή $x^2 + y^2 = 1$, δεν μπορεί να είναι τα x, y και τα δύο ίσα με 0, οπότε από τις δύο πρώτες εξισώσεις συνεπάγεται $\lambda_1 = 0$. Άρα τα $\nabla F_1(x, y, z)$, $\nabla F_2(x, y, z)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Βρίσκουμε τα σημεία (x, y, z) τοπικού ακροτάτου της f περιορισμένης στο A με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Αν το $(x, y, z) \in A$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της h περιορισμένης στο A, τότε υπάρχουν αριθμοί λ_1, λ_2 ώστε

$$\nabla h(x, y, z) = \lambda_1 \nabla F_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla F_2(x, y, z)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(1, 1, 1) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(2, 0, 1).$$

Συνδυάζοντας με τις $x^2 + y^2 = 1$ και $2x + z = 1$, βλέπουμε ότι το σημείο τοπικού ακροτάτου (x, y, z) είναι λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 y = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

Άρα $\lambda_2 = 1$, και έχουμε το μικρότερο σύστημα

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x = -1 \\ 2\lambda_1 y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

Προφανώς είναι $\lambda_1 \neq 0$, οπότε από τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος παίρνουμε

$$x = -\tfrac{1}{2\lambda_1}, \quad y = \tfrac{1}{2\lambda_1}.$$

Τότε η τρίτη εξίσωση γίνεται

$$\tfrac{1}{2\lambda_1^2} = 1$$

και άρα $\lambda_1 = -1/\sqrt{2}$ ή $\lambda_1 = 1/\sqrt{2}$. Άρα βρίσκουμε δύο αντίστοιχα ζεύγη (x, y) και μαζί με την τέταρτη εξίσωση $2x + z = 1$ προκύπτουν δύο πιθανά σημεία τοπικού ακροτάτου στο A:

$$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), \quad (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).$$

Στο πρώτο σημείο η h έχει τιμή $1 - \sqrt{2}$ και στο δεύτερο σημείο έχει τιμή $1 + \sqrt{2}$.
Άρα οι τιμές $1 - \sqrt{2}$ και $1 + \sqrt{2}$ είναι η ελάχιστη τιμή και η μέγιστη τιμή της h στο A.

4.4 Επίλυση m εξισώσεων ως προς m μεταβλητές.

Εν όψει της γενίκευσης του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης σε περισσότερες από μία εξισώσεις, ας δούμε το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.15. Θεωρούμε το σύστημα m γραμμικών εξισώσεων, με αγνώστους τα $y_1, \ldots, y_m$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m &= c_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \cdots + b_{mm}y_m &= c_m \end{aligned}$$

Αν μεταφέρουμε τους όρους οι οποίοι περιέχουν τα $x_1, \ldots, x_n$ στην δεξιά μεριά, τότε παίρνουμε ένα μη-ομογενές σύστημα, το οποίο για να έχει λύση χρειάζεται να υποθέσουμε ότι

$$\det \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Αν, λοιπόν, ονομάσουμε $F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ τις παραστάσεις στην αριστερή μεριά των αρχικών εξισώσεων, βλέπουμε ότι η συνθήκη γράφεται

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Μετά από αυτά τα εισαγωγικά, ορίστε το γενικό θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. *Θεωρούμε συναρτήσεις $F_1, \ldots, F_m : U \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, και το εσωτερικό σημείο $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{01}, \ldots, y_{0m})$ του U. Θεωρούμε και το σύνολο A των σημείων $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in U$ τα οποία ικανοποιούν τις m εξισώσεις*

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= c_1 \\ &\vdots \\ F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= c_m \end{aligned}$$

Το A είναι τομή ισοσταθμικών συνόλων των $F_1, \ldots, F_m$. Υποθέτουμε ότι το σημείο $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{01}, \ldots, y_{0m})$ ανήκει στο A, δηλαδή ικανοποιεί όλες τις παραπάνω εξισώσεις. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι $F_1, \ldots, F_m$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς όλες τις μεταβλητές σε μία μπάλα με κέντρο το σημείο $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (x_{01}, \ldots, x_{0n}, y_{01}, \ldots, y_{0m})$, και ότι στο σημείο αυτό ισχύει

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{4.1}$$

Τότε υπάρχει ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο I στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο περιέχει το $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$, και ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο J στον $\mathbb{R}^m$, το οποίο περιέχει το $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0m})$, ώστε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I$ να υπάρχει μοναδικό $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in J$ ώστε το σημείο $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ να ανήκει στο A ή, ισοδύναμα, να ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων. Με άλλα λόγια, το μέρος του συνόλου A το οποίο περιέχεται στο ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο $I \times J$ είναι γράφημα μίας συνάρτησης $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : I \to J$, όπου για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I$ το

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

είναι το μοναδικό $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in J$ το οποίο ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων, και επομένως ισχύει

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = F_1(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) &= c_1 \\ &\vdots \\ F_m(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = F_m(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) &= c_m \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I$.
Οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : I \to J$ *έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς τις μεταβλητές* $x_1, \ldots, x_n$ *στο ορθ. παραλληλεπίπεδο* I*, οι οποίες δίνονται από τους τύπους*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{z}(\mathbf{x})) \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) \end{bmatrix}}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I$*, όπου ο πίνακας στον αριθμητή διαφέρει από τον πίνακα στον παρονομαστή μόνο ως προς την* i*-οστή στήλη (οι μερικές παράγωγοι ως προς* y_i *έχουν αντικατασταθεί από τις μερικές παραγώγους ως προς* x_j*).*

Παράδειγμα 4.16. Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} x + y + z^3 w &= 2 \\ xyz + w^2 &= 4 \end{aligned}$$

και θέλουμε να δούμε αν λύνεται ως προς τις μεταβλητές z, w, δηλαδή αν οι z, w μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις $z = f_1(x, y), w = f_2(x, y)$ των μεταβλητών x, y, κοντά στο σημείο $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, 1, 2)$.
Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F_1(x, y, z, w) = x + y + z^3 w, \quad F_2(x, y, z, w) = xyz + w^2$$

οι οποίες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 3z^2 w, \quad \frac{\partial F_1}{\partial w} = z^3,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = xy, \quad \frac{\partial F_2}{\partial w} = 2w$$

σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^{2+2} = \mathbb{R}^4$. Επίσης, το σημείο $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, 1, 2)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις. Ελέγχουμε την συνθήκη με την μη-μηδενική ορίζουσα στο σημείο $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, 1, 2)$:

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 3z^2 w & z^3 \\ xy & 2w \end{bmatrix} = 6z^2 w^2 - xyz^3$$

και άρα

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(0,0,1,2) & \frac{\partial F_1}{\partial w}(0,0,1,2) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(0,0,1,2) & \frac{\partial F_2}{\partial w}(0,0,1,2) \end{bmatrix} = 24 \neq 0.$$

Άρα υπάρχει ανοικτό ορθ. παραλληλόγραμμο I στον $\mathbb{R}^2$, το οποίο περιέχει το $(x_0, y_0) = (0, 0)$, και ανοικτό ορθ. παραλληλόγραμμο J στον $\mathbb{R}^2$, το οποίο περιέχει το $(z_0, w_0) = (1, 2)$, ώστε για κάθε $(x, y) \in I$ να υπάρχει μοναδικό $(z, w) \in J$ ώστε το σημείο (x, y, z, w) να ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων. Με άλλα λόγια, ορίζεται συνάρτηση $(f_1, f_2) : I \to J$, όπου για κάθε $(x, y) \in I$ το

$$(f_1(x, y), f_2(x, y))$$

είναι το μοναδικό $(z, w) \in J$ το οποίο ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων, και επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_1(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) &= x + y + f_1(x, y)^3 f_2(x, y) = 2 \\ F_2(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y) &= xy f_1(x, y) + f_2(x, y)^2 = 4 \end{aligned} \tag{4.2}$$

για κάθε $(x, y) \in I$.
Οι συναρτήσεις f_1, f_2 έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς τις μεταβλητές x, y στο ορθ. παραλληλόγραμμο I. Για να βρούμε τις μερικές παραγώγους των f_1, f_2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους γενικούς τύπους του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, αλλά προτιμάμε, αντί να αποστηθίσουμε γενικούς τύπους, να ακολουθήσουμε την διαδικασία με την οποία προκύπτουν και οι γενικοί τύποι: παραγωγίζουμε τις εξισώσεις (4.2) ως προς x, y. Παραγωγίζοντας ως προς x, βρίσκουμε (ως συνήθως, για να εξοικονομήσουμε χώρο γράφουμε f_1, f_2 αντί $f_1(x, y), f_2(x, y)$)

$$\begin{aligned} 1 + 3f_1^2 f_2 \tfrac{\partial f_1}{\partial x} + f_1^3 \tfrac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 \\ y f_1 + xy \tfrac{\partial f_1}{\partial x} + 2f_2 \tfrac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα μη-ομογενές γραμμικό σύστημα με "αγνώστους" $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}$ και, βάσει των τύπων του Cramer, βρίσκουμε

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & f_1^3 \\ -y f_1 & 2f_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3f_1^2 f_2 & f_1^3 \\ xy & 2f_2 \end{bmatrix}} = \frac{-2f_2 + y f_1^4}{6f_1^2 f_2^2 - xy f_1^3}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\begin{bmatrix} 3f_1^2 f_2 & -1 \\ xy & -y f_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3f_1^2 f_2 & f_1^3 \\ xy & 2f_2 \end{bmatrix}} = \frac{-3y f_1^3 f_2 + xy}{6f_1^2 f_2^2 - xy f_1^3}.$$

Φυσικά, στην θέση των f_1, f_2 κατανοούμε ότι βρίσκονται τα $f_1(x, y), f_2(x, y)$.
Ομοίως, παραγωγίζουμε τις (4.2) ως προς y και έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + 3f_1^2 f_2 \tfrac{\partial f_1}{\partial y} + f_1^3 \tfrac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 \\ x f_1 + xy \tfrac{\partial f_1}{\partial y} + 2f_2 \tfrac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & f_1^3 \\ -x f_1 & 2f_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3f_1^2 f_2 & f_1^3 \\ xy & 2f_2 \end{bmatrix}} = \frac{-2f_2 + x f_1^4}{6f_1^2 f_2^2 - xy f_1^3}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\begin{bmatrix} 3f_1^2 f_2 & -1 \\ xy & -x f_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3f_1^2 f_2 & f_1^3 \\ xy & 2f_2 \end{bmatrix}} = \frac{-3x f_1^3 f_2 + xy}{6f_1^2 f_2^2 - xy f_1^3}.$$

Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε μία παλιότερη ορολογία στο μάθημα αυτό. Αν έχουμε διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ και καθεμία από τις συντεταγμένες πραγματικές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m$ είναι συνάρτηση n μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$, τότε ο $m \times n$ πίνακας

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

(αν υπάρχει) ονομάζεται *παράγωγος* της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}$.

Ο ακόλουθος ορισμός έχει να κάνει με την περίπτωση $m = n$, δηλαδή όταν ο αριθμός των συντεταγμένων συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_n$ είναι ίδιος με τον αριθμό των μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$.

Ορισμός 4.1. *Έστω* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$*, όπου* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*, και* $\mathbf{x}_0$ *εσωτερικό σημείο του* U*. Αν οι* $f_1, \ldots, f_n$ *έχουν μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς* $x_1, \ldots, x_n$ *στο σημείο* $\mathbf{x}_0$*, τότε χρησιμοποιούμε δύο (ισοδύναμα) σύμβολα για την ορίζουσα του πίνακα* $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$*:*

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \tfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\mathbf{x}_0) = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα αυτή, είτε με το σύμβολο $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ *είτε με το* $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\mathbf{x}_0)$ *ονομάζεται* **Ιακωβιανή ορίζουσα** *της* $\mathbf{f}$ *στο* $\mathbf{x}_0$*.*

Σύμφωνα με την τελευταία ορολογία, η σχέση (4.1) του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης γράφεται και ως εξής:

$$J_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0 \quad \text{και} \quad \tfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Στο σύμβολο $J_{\mathbf{y}}\mathbf{F}$ έχουμε βάλει το $\mathbf{y}$ ως δείκτη για να φαίνεται ότι παραγωγίζουμε τις $F_1, \ldots, F_m$ ως προς τις μεταβλητές $y_1, \ldots, y_m$ κρατώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ σταθερές.

4.5 Αντιστρεψιμότητα συνάρτησης.

Το τελευταίο θεώρημα του μαθήματος έχει να κάνει με την αντιστρεψιμότητα μίας συνάρτησης. Ας δούμε τί γίνεται στην περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής. Έστω ότι η $f : U \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα U, και έστω ότι σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του U ισχύει $f'(x_0) > 0$. Επειδή η f' είναι συνεχής, υπάρχει κάποιο διάστημα $I \subseteq U$, με το x_0 ως εσωτερικό του σημείο, ώστε να ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα I, οπότε απεικονίζει το I σε κάποιο διάστημα J, με το $y_0 = f(x_0)$ ως εσωτερικό του σημείο. Άρα η $f : I \to J$ είναι ένα-προς-ένα στο I και επί του J, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$. Η f^{-1} έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα J, και ισχύει

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{f'(x)} \quad \text{για κάθε } y \in J, \ \text{όπου } x = f^{-1}(y) \in I.$$

Παρόμοιο αποτέλεσμα έχουμε όταν $f'(x_0) < 0$.

Θα δούμε τώρα πώς αυτό το αποτέλεσμα γενικεύεται για διανυσματικές συναρτήσεις με n συντεταγμένες πραγματικές συναρτήσεις, η καθεμία από τις οποίες έχει n μεταβλητές.

Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης. *Έστω* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$*, όπου* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*, και έστω* $\mathbf{x}_0$ *εσωτερικό σημείο του* U *και* $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$*. Υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της* $\mathbf{f}$ *έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια μπάλα με κέντρο το* $\mathbf{x}_0$*, και ότι*

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο $V \subseteq U$*, με* $\mathbf{x}_0 \in V$*, και ανοικτό σύνολο* $W \subseteq \mathbb{R}^n$*, με* $\mathbf{y}_0 \in W$*, έτσι ώστε η* $\mathbf{f} : V \to W$ *να είναι ένα-προς-ένα στο* V *και επί του* W*. Έτσι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση* $\mathbf{f}^{-1} : W \to V$*, οι συντεταγμένες συναρτήσεις της οποίας έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο* W*, και ισχύει*

$$D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad J(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}) = \tfrac{1}{J\mathbf{f}(\mathbf{x})} \quad \text{για κάθε } \mathbf{y} \in W, \ \text{όπου } \mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \in V.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.
Θεωρούμε τις συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ της $\mathbf{f}$, και ορίζουμε τις συναρτήσεις $F_1, \ldots, F_n : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τους τύπους:

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) - y_1 \\ &\vdots \\ F_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= F_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = f_n(x_1, \ldots, x_n) - y_n \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
Κατόπιν, θεωρούμε το σύνολο A των σημειών $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in U \times \mathbb{R}^n$ τα οποία ικανοποιούν τις n εξισώσεις

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f_1(x_1, \ldots, x_n) - y_1 = 0 \\ &\vdots \\ F_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f_n(x_1, \ldots, x_n) - y_n = 0 \end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι αυτές οι εξισώσεις ισοδυναμούν με την διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

Δηλαδή το σύνολο A είναι το σύνολο των σημείων $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ με $\mathbf{x} \in U$ και $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, το σύνολο A είναι το γράφημα της συνάρτησης $\mathbf{f}$:

$$A = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \,|\, \mathbf{x} \in U\}.$$

Γνωρίζουμε ότι το σημείο $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ανήκει στο A, αφού $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.
Επίσης, γνωρίζουμε ότι οι $F_1, \ldots, F_n$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς όλες τις μεταβλητές σε μία μπάλα με κέντρο το $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ και ότι στο σημείο αυτό ισχύει

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να λύσουμε τις n εξισώσεις $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ldots, F_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ως προς $\mathbf{x}$ ως συνάρτηση του $\mathbf{y}$. Πιο συγκεκριμένα:
Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης συνεπάγεται ότι υπάρχει ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο J στον $\mathbb{R}^n$, με $\mathbf{y}_0 \in J$, και ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο I στον $\mathbb{R}^n$, με $\mathbf{x}_0 \in I$, ώστε για κάθε $\mathbf{y} \in J$ να υπάρχει ακριβώς ένα $\mathbf{x} \in I$ ώστε το σημείο $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ να ανήκει στο A ή, ισοδύναμα, να ικανοποιεί την $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Με άλλα λόγια, ορίζεται συνάρτηση $\mathbf{g} : J \to I$ ώστε για κάθε $\mathbf{y} \in J$ το $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ να είναι το μοναδικό $\mathbf{x} \in I$ για το οποίο ισχύει $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Δηλαδή ισχύει

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{για κάθε } \mathbf{y} \in J. \tag{4.3}$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$W = J, \quad V = \mathbf{g}(W) = \mathbf{g}(J) \subseteq I.$$

Έτσι η συνάρτηση $\mathbf{g} : W \to V$ είναι επί του V.
Προφανώς, ισχύει $\mathbf{y}_0 \in J = W$. Επειδή $\mathbf{x}_0 \in I$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$, από τον ορισμό της $\mathbf{g}$ συνεπάγεται ότι $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0$, και άρα $\mathbf{x}_0 \in V$.
Η (4.3) ξαναγράφεται:

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{για κάθε } \mathbf{y} \in W. \tag{4.4}$$

Επομένως, αν για $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W$ ισχύει $\mathbf{g}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_2)$, τότε

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}_1)) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}_2)) = \mathbf{y}_2$$

και άρα η $\mathbf{g}$ είναι ένα-προς-ένα στο W.
Τώρα, αν $\mathbf{x} \in V$, τότε, βάσει του ορισμού του συνόλου V, υπάρχει $\mathbf{y} \in W$ ώστε $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ και τότε η (4.4) συνεπάγεται

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}.$$

Δηλαδή $\mathbf{f} : V \to W$. Επίσης,

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in V. \tag{4.5}$$

Οι σχέσεις (4.4) και (4.5) λένε ότι οι συναρτήσεις $\mathbf{f} : V \to W$ και $\mathbf{g} : W \to V$ είναι αντίστροφες. Επειδή η $\mathbf{g}$ είναι ένα-προς-ένα στο W και επί του V, συνεπάγεται ότι η $\mathbf{f}$ είναι ένα-προς-ένα στο V και επί του W.
Το σύνολο $W = J$ είναι ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο, οπότε είναι ανοικτό σύνολο. Θα δούμε ότι και το V είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $\mathbf{x} \in V \subseteq I$. Τότε $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in W$. Επειδή το W είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B_\epsilon(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \subseteq W$. Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}$ και το $\mathbf{x}$ ανήκει στο ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο I, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq I$ και για κάθε $\mathbf{x}' \in B_\delta(\mathbf{x})$ να ισχύει $\mathbf{f}(\mathbf{x}') \in B_\epsilon(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ και άρα $\mathbf{f}(\mathbf{x}') \in W$. Συνεπάγεται $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) \in V$ για κάθε $\mathbf{x}' \in B_\delta(\mathbf{x})$. Δηλαδή, $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq V$. Βλέπουμε ότι για κάθε $\mathbf{x} \in V$ υπάρχει μπάλα με κέντρο $\mathbf{x}$ η οποία περιεται στο V. Άρα το V είναι ανοικτό σύνολο.
Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης έχουμε επίσης ότι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{g} : W \to V$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Επίσης, από την (4.4) και από τον κανόνα αλυσίδας παίρνουμε

$$D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))\, D\mathbf{g}(\mathbf{y}) = I_n \quad \text{για κάθε } \mathbf{y} \in W.$$

όπου I_n είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας, αυτός που έχει κάθε διαγώνιο στοιχείο του ίσο με 1 και κάθε άλλο στοιχείο του ίσο με 0. Γράφοντας $\mathbf{f}^{-1}$ στην θέση της $\mathbf{g}$, καθώς και $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, έχουμε ότι

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})\, D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = I_n \quad \text{για κάθε } \mathbf{y} \in W, \ \text{όπου } \mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \in V.$$

Άρα οι $n \times n$ πίνακες $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ και $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι αντίστροφοι:

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1} \quad \text{για κάθε } \mathbf{y} \in W, \ \text{όπου } \mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \in V.$$

Από αυτήν την σχέση συνεπάγεται

$$J\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \tfrac{1}{J\mathbf{f}(\mathbf{x})} \quad \text{για κάθε } \mathbf{y} \in W, \ \text{όπου } \mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \in V,$$

επειδή οι ορίζουσες αντίστροφων πινάκων είναι αντίστροφοι αριθμοί. □

Στο θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης, αν γράψουμε τις συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f} : V \to W$ ως

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\ \vdots \\ y_n &= y_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

και τις συντεταγμένες συναρτήσεις της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1} : W \to V$ ως

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, \dots, y_n) \\ &\ \vdots \\ x_n &= x_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

τότε η σχέση $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$ για τις παραγώγους γράφεται

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^{-1}$$

όπου $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ή, ισοδύναμα, $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$.
Ομοίως, η σχέση $J\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{1}{J\mathbf{f}(\mathbf{x})}$ για τις Ιακωβιανές ορίζουσες γράφεται

$$\tfrac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}(\mathbf{y}) = 1 \Big/ \tfrac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{x}).$$

Παράδειγμα 4.17. Θεωρούμε την συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\begin{aligned} z &= z(x,y) = x^2 - y^2 \\ w &= w(x,y) = 3xy^3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Με αυτό εννοούμε ότι η συνάρτηση έχει συντεταγμένες συναρτήσεις τις z, w η καθεμία από τις οποίες είναι συνάρτηση των x, y.
Θέλουμε να δούμε αν η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη κοντά στο σημείο $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ και στο αντίστοιχο σημείο $(z_0, w_0) = (0, -3)$.
Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις z, w έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς x, y σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$. Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι ίση με

$$\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 3y^3 & 9xy^2 \end{bmatrix} = 18x^2y^2 + 6y^4$$

και, ειδικώτερα, στο σημείο $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ είναι

$$\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)}(-1,1) = 24 \neq 0.$$

Άρα η συνάρτηση είναι "τοπικά" αντιστρέψιμη. Συγκεκριμένα, υπάρχει ανοικτό σύνολο V, με $(x_0, y_0) = (-1, 1) \in V$, και ανοικτό σύνολο W, με $(z_0, w_0) = (0, -3) \in W$, ώστε για κάθε $(x, y) \in V$ υπάρχει μοναδικό $(z, w) \in W$ τα οποία συνδέονται με τις σχέσεις (4.6) και, αντιστρόφως, για κάθε $(z, w) \in W$ υπάρχει μοναδικό $(x, y) \in V$ τα οποία συνδέονται με τις αντίστροφες σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= x(z,w) \\ y &= y(z,w) \end{aligned}$$

Τους ακριβείς τύπους των αντίστροφων σχέσεων ίσως να μην μπορούμε να τους βρούμε. Αλλά γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $x(z, w), y(z, w)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο ανοικτό σύνολο W, και ότι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}(z,w) = 1\Big/\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)}(x,y) = \frac{1}{18x^2y^2+6y^4}.$$

Π.χ. στο σημείο $(z_0, w_0) = (0, -3)$ είναι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}(0,-3) = 1\Big/\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)}(-1,1) = \frac{1}{24}.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z}(z,w) & \frac{\partial x}{\partial w}(z,w) \\ \frac{\partial y}{\partial z}(z,w) & \frac{\partial y}{\partial w}(z,w) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 3y^3 & 9xy^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{18x^2y^2+6y^4}\begin{bmatrix} 9xy^2 & 2y \\ -3y^3 & 2x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial z}(z,w) &= \frac{9xy^2}{18x^2y^2+6y^4}, \quad \frac{\partial x}{\partial w}(z,w) = \frac{2y}{18x^2y^2+6y^4}, \\ \frac{\partial y}{\partial z}(z,w) &= -\frac{3y^3}{18x^2y^2+6y^4}, \quad \frac{\partial y}{\partial w}(z,w) = \frac{2x}{18x^2y^2+6y^4}. \end{aligned}$$